Funkcionálanalízis

Matolcsi Tamás
előadásai alapján összeállította
Lukács Árpád

2003. április 21.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

A funkcionálanalízis alapvető struktúrái

1.1. Lineáris alterek, zárt lineáris alterek

1.1.1. Definíció. *Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor azt mondjuk, hogy*
– $H \subset V$ **lineárisan független**, *ha* $\forall x \in H \ x \notin Span(H \setminus \{x\})$
– $B \subset V$ **Algebrai (vagy Hamel-) bázis**, *ha lineárisan független, és* $Span\, B = V$

Legyen $(V, \|.\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor érvényes a következő állítás:

1.1.1. Állítás. *$M \subset V$ lineáris altér $\Rightarrow$ $\overline{M} \subset V$ is lineáris altér*

Bizonyítás Legyen $x, y \in \overline{M}$. Ekkor ha

$$x = \lim_n x_n \qquad y = \lim_n y_n \qquad x_n, y_n \in M,$$

akkor a határérték tulajdonságai miatt

$$x + y = \lim_n (x_n + y_n) \in \overline{M}$$

■

A továbbiakban a zárt lineáris alterek különösen fontos szerepet fognak játszani, ezért szükséges a következő definíció:

1.1.2. Definíció. *Legyen $H \subset V$, ekkor a H* **generálta zárt lineáris altér***nek a legszűkebb zárt lineáris alteret nevezzük, aminek H részhalmaza, azaz*

$$\overline{Span\, H} = \bigcap \{M | M \text{ zárt lineáris altér}, H \subset M\}$$

Triviális az állítás, hogy

1.1.2. Állítás. *A H generálta zárt lineáris altér megegyezik a H generálta lineáris altér lezártjával.*

1.1.3. Definíció. *Legyen $M \subset V$ lineáris altér. Azt mondjuk, hogy M* **sűrű lineáris altér**, *ha* $\overline{M} = V$

Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér. Ekkor az $\mathcal{L}^P_\mu(X)$ terek elemei függvényosztályok, mégis azt szokták mondani, hogy az $f \in \mathcal{L}^P_\mu(X)$ *függvény*, ezt kellő óvatossággal mi is követni fogjuk. Azonban az f függvény x pontban felvett $f(x)$ értékéről beszélni nem értelmes, hiszen egy függvényosztály elemei csak majdnem mindenütt egyenlőek egymással.

Ezekben a terekben, ha $\mathcal{S}$ félgyűrű, és $\sigma_A(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, akkor a p-edik hatványon μ-integrálható $\mathcal{S}$-lépcsősfüggvények sűrű lineáris alteret alkotnak. A $p = \infty$ esetben az $\mathcal{A}$-lépcsős függvények alkotnak sűrű lineáris alteret.

Speciális esetként érdemes $\ell^p = \mathcal{L}^p_s(\mathbb{N})$ esetét vizsgálni. Ekkor az előbbi $\mathcal{S}$ a véges halmazok félgyűrűje, illetve $p = \infty$ esetben maga $\mathbb{N}$.

1.2. Topologikus lineáris függetlenség, bázisok, folytonosság

1.2.1. Definíció. *Legyen V továbbra is normált tér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor*
– $H \subset V$ **topologikusan lineárisan független**, *ha* $\forall x \in H$ $x \notin \overline{Span(H \setminus \{x\})}$
– $B \subset V$ **topologikus algebrai (vagy Schauder-) bázis**, *ha topologikusan lineárisan független és* $\overline{\mathrm{Span}\, B} = V$

Azt tudjuk, hogy bármely vektortérben van Hamel-bázis (ld. Matolcsi: Analízis II.), az viszont, hogy Shauder-bázis mindig van-e, sokáig nyitott kérdés volt. Ma már tudjuk, hogy adható példa olyan vektortérre, amelyben nincs. Az lineáris algebrában alkalmazott bizonyítás Schauder-bázisra azért nem működik, mert egy ilyenekből álló lánc úniója nem feltétlenül topológikusan lineárisan független.

Fontos szerepük lesz a kiegészítő altereknek is. Tudnunk kell, hogy egy zárt lineáris altérnek nem feltétlenül létezik zárt kiegészítő altere.

Legyen V_1 és V_2 normált terek, és legyen V_2 teljes. Ha $A : V_1 \rightarrowtail V_2$ folytonos lineáris leképezés, akkor a határérték és a lineáris műveletek kapcsolata miatt $\exists |$ $\overline{A} : \overline{\mathrm{Dom}\, A} \rightarrowtail V_2$ folytonos lineáris leképezés, úgy hogy $\|\overline{A}\| = \|A\|$.

1.3. Általánosított sorok

Legyen $(V, \|.\|)$ normált tér x_n $(n \in \mathbb{N})$. Emlékeztetünk a sorösszeg konvergenciájának definíciójára: $\exists \sum_n x_n$, ha $\exists x \in V$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ $\forall n > n_\varepsilon$ $\|x - \sum_{k=1}^n x_k\| < \varepsilon$. Ennek mintájára vezetjük be a következő fogalmat

1.3.1. Definíció. *Legyen I indexhalmaz, $x_i \in V$ $(i \in I)$. Ekkor azt mondjuk, hogy $\exists \sum_{i \in I} x_i$, azaz $\sum_i x_i$* **konvergens**, *ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists F_\varepsilon \subset I$ véges halmaz, hogy minden $F \subset I$ véges halmaz esetén, amelyre $F \supset F_\varepsilon$ $\left\|x - \sum_{i \in F} x_i\right\| < \varepsilon$.*

Vegyük észre, hogy ez éppen azt jelenti, hogy az $I \to V$, $x \mapsto x_i$ függvény integrálható az I számláló mértéke szerint.

1.3.2. Definíció. *Egy $\sum_{i \in I} x_i$ sort* **Cauchy–félé***nek nevezünk, ha*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F_\varepsilon \subset I \text{ véges} \quad \forall K \subset I \text{ véges} \quad F_\varepsilon \cap K = \emptyset \quad \left\| \sum_{i \in K} x_i \right\| < \varepsilon$$

Könnyen látható, hogy $I = \mathbb{N}$ esetén ez a feltétlen konvergenciával ekvivalens, hiszen a véges halmazra való összegzés esetén nem adunk meg sorrendet. Azt is egyszerűen beláthatjuk, hogy ha egy sor konvergens, akkor szükségképpen Cauchy–féle is. Megmutatható, hogy ha a tér teljes, akkor visszafelé is következik.

A következő állítás azt mondja ki, hogy ezzel a sorfogalmat nem igazán általánosítottuk, ez az általánosság csak látszólagos, lényegében nincs különbség a sor eredeti fogalma és eközött.

1.3.1. Állítás. *Legyen $x_i \in V$ $(i \in I)$. ekkor, ha $\exists \sum_{i \in I} x_i$ akkor legfeljebb megszámlálható sok $x_i \neq 0$, azaz $\{i \in I | x_i \neq 0\}$ legfeljebb megszámlálható halmaz.*

Bizonyítás A Cauchy–kritériumot (ld. fent) alkalmazzuk egyelemű halmazokra. A fenti definícióból következik, hogy $\{i \in I | \|x_i\| \geq \frac{1}{n}\}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re véges kell legyen. Ekkor mivel

$$\{i \in I | x_i \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{i \in I | \|x_i\| \geq \frac{1}{n}\},$$

és a jobb oldalon megszámláható sok megszámlálható halmaz uniója áll, az is csak megszámlálható lehet. ■

1.4. Tartó, példák

1.4.1. Definíció. *Legyen (M, d) metrikus tér, $f : M \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. A*

$$Supp\, f := \overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}}$$

halmazt f **tartóján***ak nevezzük.*

1.4.1. Állítás. $(\mathit{Supp}\, f)^{\flat} = \{x \in M | \exists G \text{ nyílt}, x \in G, f|_G = 0\}$

1.4.2. Állítás. *Vegyük a következő halmazt:* $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} |\, \mathit{Supp}\, f \text{ kompakt}\}$. *Ennek elemei a p-edik hatványon integrálhatók*[1], *és ez a halmaz lineáris tér, hiszen* $\mathit{Supp}(f+g) \subset \mathit{Supp}\, f \cup \mathit{Supp}\, g$. *Ez (ill. ezekenek az ekvivalenciaosztályai) sűrű* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$*-ben.*

Bizonyítás Meg fogjuk mutatni, hogy ennek a lezártja tartalmazza a lépcsősfüggvényeket. Ehhez elég a karakterisztikus függvényeket előállítani ilyen függvények határértékeként. Legyen I korlátos intervallum. Ekkor azt kell megmutatnunk, hogy léteznek olyan f_n $(n \in \mathbb{N})$ kompakt tartójú függvények, hogy $\chi_I = (\mathcal{L}^p) \lim_n f_n$, ez pedig lehetséges, olyan függvényeket véve, amelyek az intervallum széle melletti kis szakaszon lineárisan emelkednek, azon kívül nullák, az intervallumon belül pedig az 1 értéket veszik fel. ■

Azt viszont a RIESZ - FISCHER-tétel bizonyításának egyik lépéséből tudjuk (ld. Matolcsi: Analízis V.), hogy a reprezentánsok nem fognak mm. f-hez tartani, de lesz olyan részsorozatuk.

A fenti állítás lényegében ugyanígy bebizonyítható akkor is, ha (M,d) metrikus tér, μ BOREL-mérték, és az $\mathcal{L}^p_\mu(M)$ teret vesszük $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ helyett.

1.4.3. Állítás. $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$*-ben a kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvények sűrű alteret alkotnak.*

Bizonyítás Tekintsük a következő függvényt:

$$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t \mapsto \begin{cases} e^{-1/t} \text{ , ha } t > 0 \\ 0 \text{ , ha } t \le 0 \end{cases}$$

majd

$$0 < r < R \qquad \xi_{r,R}(x) := \frac{\eta(R^2 - |x|^2)}{\eta(R^2 - |x|^2) + \eta(|x|^2 - r^2)} \qquad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Vizsgáljuk meg, hogy a nevező milyen esetben válik nullává:

$$\left.\begin{aligned} R^2 - |x|^2 \le 0 \\ |x|^2 - r^2 \le 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow R^2 \le |x|^2 \le r^2,$$

ami lehetetlen, azaz a nevező sosem válik nullává, ez a függvény mindenütt értelmes. Értéke 0, ha $|x| \ge R$, 0 és 1 között van, ha $r < |x| < R$, és 1, ha $|x| \le r$.

Tekintsük az $N = 1$ esetet. Ekkor legyen I intervallum. Ekkor az előző függvény eltoltjaival, az $r = \frac{b-a}{2}$ és $R = \frac{b-a}{2} + \frac{1}{n}$ választással, a folytonos függvények esetében alkalmazott gondolatmenettel $\chi_I = (\mathcal{L}^p) \lim_n f_n$.

A tetszőleges N esetében téglákra, ilyen függvények szorzatával ugyanez a gondolatmenet alkalmazható, ezzel a bizonyítást be is fejeztük. ■

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum. Ekkor $\mathcal{L}^p(I) = \mathcal{L}^p(\overset{\circ}{I}) = \mathcal{L}^p(\overline{I})$, azaz egy intervallum esetében mindegy, hogy a nyílt vagy a zárt intervallumon értelmezett függvényekből indulunk ki, ugyanazt a függvényteret kepjuk. Itt is el lehet mondani az előbbieket, de mivel itt az egészen értelmezett seholsem nulla függvények is kompakt tartójúak, ezért egy kicsit többet is szeretnénk mondani. Egy olyan függvényt amelynek tartója kompakt, és az I belsejének része, az I **belsejében kompakt tartójú**nak nevezünk. Ebben az esetben ezek is sűrű lineáris alteret alkotnak.

1.5. Feladatok

1.1. Feladat. *Tudjuk, hogy véges dimenziós vektortér egy bázisáról egy másik lineáris térbe megadott leképezés egyértelműen kiterjeszthető az egész téren értlemezett lineáris leképezéssé. Vajon igaz-e, hogy egy V normált tér B Schauder bázisán adott $A : B \rightarrowtail U$ leképezés (U normált tér) egyértelműen kiterjeszthető $\overline{A} : V \to U$ folytonos lineáris leképezéssé, ha* $\exists L > 0 \quad \|Ax\| \le L\|x\| \quad (\forall x \in B)$?

Megoldás Általában nem. Azt viszont tudjuk, hogy ha kiterjeszthető, akkor egyértelműen, hiszen azt tudjuk, hogy $A : \operatorname{Span} B \to U$ leképezéssé egyértelműen kiterjeszthető. Ha $\overline{A} : \overline{\operatorname{Span} B} \to U$ létezik, akkor folytonos, és $A \subset \overline{A}$. Lineáris altérről egyértelműen és folytonosan terjeszthető ki.

[1]folytonos függvény, kompakt halmazon, σ-véges mérték szerint

Most példát is adunk arra, amikor nem terjeszthető ki: vegyük ℓ^2-ben az $\{e_n\}$ Schauder-bázist. Legyen $A : \{e_n\} \to \ell^1, e_n \mapsto e_1$ $(n \in \mathbb{N})$. ℓ^2 minden eleme $\sum_n \alpha_n e_n$ alakú, azonban ez csak azokra az elemekre terjeszthető ki, amelyekre az α_n sorozat összegezhető, hiszen ha létezne $\overline{A}$, akkor

$$\overline{A} \sum_n \alpha_n e_n = \sum_n \alpha_n \overline{A} e_n = \sum_n \alpha_n e_1$$

lenne.

2. fejezet

A funkcionálanalízis alapvető tételei

2.1. A Weierstrass-féle approximációs tétel

Tekintsük a $C[a,b]$ tereket! Ezeken többféle normát, illetve félnormát adtunk meg, de csak a $\|.\|_\infty$ normára nézve volt teljes, viszont a többi esetében is létezett a teljes burka. Tudjuk, hogy $(C[a,b], \|.|_p)$ teljessé tétele éppen a már vizsgált $\mathcal{L}^p([a,b])$, így ebben sűrű alteret alkot, kivéve, ha $p = \infty$, ekkor $C[a,b] \subsetneq \mathcal{L}^\infty([a,b])$, hanem valódi zárt lineáris altér.

$C[a,b]$-ben általában a „végtelen” norma a legkényelmesebb, ezért ha mást nem mondunk, akkor az veendő. Most egy igen fontos sűrű részhalmazát fogjuk megvizsgálni.

2.1.1. Állítás. (Weierstrass-féle approximációs tétel) *$(C([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$-ben a polinomok sűrű lineáris alteret alkotnak.*

Bizonyítás Elég a $[0,1]$ intervallumra belátnunk, zsugorítani-nyújtani már lehet. Legyen $n \in \mathbb{N}, k = 1 \dots n$. Bevezetjük a BERNSTEIN-*féle polinomokat*:

$$\Theta := \mathrm{id}_{[0,1]},$$

$$p_{n,k} := \binom{n}{k} \Theta^k (1-\Theta)^{n-k}.$$

Ekkor a binomiális tétel alapján tudjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = (\Theta + 1 - \Theta)^n = 1,$$

és

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

ezt x szerint differenciálva:

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} y^{n-k}, \tag{*}$$

és ezt még egyszer

$$n(n-1)(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} y^{n-k}, \tag{**}$$

majd (*)-ban x-szel beszorozva

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k y^{n-k},$$

illetve (**)-ban x^2-tel:

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^k y^{n-k}. \tag{**}$$

Ezekbe a formulákba x helyére Θ-t, y helyére $1-\Theta$-t helyettesítve:

$$\sum_{k=0}^{n} kp_{n,k} = n\Theta,$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)p_{n,k} = n(n-1)\Theta^2,$$

és mivel $k(k-1) = k^2 - k$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k-n\Theta)^2 p_{n,k} &= n^2\Theta^2 + n(n-1)\Theta^2 + n\Theta \\ &= -n^2\Theta^2 + n\Theta = n\Theta(1-\Theta) \leq n\end{aligned}$$

Legyen $f \in C[0,1]$ és

$$P_n := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k},$$

polinom, ami a BERNSTEIN-polinomok lineárkombinációja. Azt szeretnénk belátni, hogy

$$(u)\lim_n P_n = f,$$

hiszen a „végtelen" normában való konvergencia éppen az egyenletes konvergenciával ekvivalens.

$$\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon \quad |x-y| < \delta_\varepsilon \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

hiszen f egyenletesen folytonos (mert kompakt halmazon értelmezett).

$$|f(x) - P_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) p_{n,k}(x)\right|$$

Definiáljuk a következő halmazt:

$$H_x := \left\{k \in \{1,2,\ldots,n\} \,\middle|\, \left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta_\varepsilon\right\}$$

Ekkor a fenti norma:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \sum_{k\in H_x}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| p_{n,k}(x) + \sum_{k\notin H_x}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| p_{n,k}(x)$$

Az első tag a függvény egyenletes folytonossága miatt kisebb vagy egyenlő ε-nal, a másik tag kicsiségét kell még vizsgálni. A H_x halmaz definíciója miatt azon kívül $|k - nx| \geq n\delta_\varepsilon$, ezt átrendezve és a négyzetre emelve $\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta_\varepsilon^2} \geq 1$, ekkor a fenti egyenlet jobboldali tagját a következőképpen becsülhetjük:

$$\sum_{k\notin H_x}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| p_{n,k}(x) \leq 2\|f\| \sum_{k\notin H_x}\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta_\varepsilon^2} p_{n,k}(x) \leq 2\|f\|\frac{1}{n^2\delta_\varepsilon^2} n \sim \frac{1}{n},$$

amiről látható, hogy n nagy értékeire kisebb lesz ε-nál, így az egész norma kisebbegyenlő lesz 2ε-nál, ezzel bebizonyítottuk, hogy a P_n polinomsorozat valóban megközelíti f-et. ■

2.2. A Stone–Weierstrass-tétel

A következő tételt bizonyítás nélkül mondjuk ki, mert a bizonyítás hosszadalmas volna.

2.2.1. Állítás. (Stone–Weierstrass-tétel) *Legyen K kompakt metrikus tér (pl. egy metrikus tér kompakt részhalmaza), és $A \subset C(K,\mathbb{R})$ úgy, hogy*
(i) A algebra (azaz lineáris tér, és a szorzat is benne van)
(ii) $1 \in A$ (azaz a konstans függvények benne vannak)
(iii) A szétválasztja a K pontjait (azaz $\forall x,y \in K\ x \neq y\ \exists f \in A\ f(x) \neq f(y)$),
ekkor A sűrű $C(K,\mathbb{R})$-ben, azaz $\overline{A} = C(K,\mathbb{R})$

Ehhez hasonló tételt lehet kimondani a komplex esetben is:

2.2.2. Állítás. (Stone–Weierstrass-tétel) *Legyen K kompakt metrikus tér (pl. egy metrikus tér kompakt részhalmaza), és $A \subset C(K,\mathbb{C})$ úgy, hogy*
*(i) A *-algebra (azaz lineáris tér, és a szorzat és a konjugált is benne van)*
(ii) $1 \in A$ (azaz a konstans függvények benne vannak)
(iii) A szétválasztja a K pontjait (azaz $\forall x,y \in K\ x \neq y\ \exists f \in A\ f(x) \neq f(y)$),
ekkor A sűrű $C(K,\mathbb{R})$-ben, azaz $\overline{A} = C(K,\mathbb{R})$

2.3. A Baire-féle kategóriatétel

2.3.1. Definíció. *Legyen M metrikus tér. Azt mondjuk, hogy*

– $S \subset M$ **seholsem sűrű**, *ha $\overset{\circ}{\overline{S}} = \emptyset$*
– $A \subset M$ **első kategóriájú**, *ha előáll megszámlálható sok seholsem sűrű halmaz uniójaként.*
– $A \subset M$ **második kategóriájú**, *ha nem első kategóriájú*

Természetesen nem minden első kategóriájú halmaz sehol sem sűrű, példa erre a racionális számok terében az egyponthalmazok, itt a teljes tér előáll ezek uniójaként. Most megvizsgáljuk, hogy ilyen mikor lehetséges.

2.3.1. Állítás. *Legyen $(V, \|.\|)$ normált tér, ekkor egy $L \subset V$ lineáris altér vagy seholsem sűrű, vagy mindenütt sűrű.*

Bizonyítás Legyen L nem seholsem sűrű, azaz $\overset{\circ}{\overline{L}} \neq \emptyset$, így $\exists G_r(x) \subset \overline{L}$. Ekkor, mivel L lineáris altér,

$$G_r(0) = G_r(x) - x \subset L \quad \text{és} \quad \mathbb{K}G_r(0) \subset \overline{L},$$

mivel L lineáris altér. Azonban $\mathbb{K}G_r(0) = V$, és ezzel a bizonyítást be is fejeztük. ■

A következő állítás véges sok halmazra könnyen belátható:

2.3.2. Állítás. *Legyen (M,d) metrikus tér.*
(i) Ha H_i $(i = 1\ldots n)$ sűrű nyílt halmaz (azaz $\overline{H_i} = M$), akkor

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} H_i} = M$$

(ii) Ha Z_i $(i = 1\ldots n)$ seholsem sűrű zárt halmaz (azaz $\overset{\circ}{Z_i} = \emptyset$), akkor

$$\overbrace{\bigcup_{i=1}^{n} Z_i}^{\circ} = \emptyset$$

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy elég két halmaz esetére bizonyítanunk az állítást.
(i) Legyenek G és H nyílt halmazok. Ekkor $G \subset G \cup H^\flat = (G \cap H) \cup H^\flat \Rightarrow \overline{G} \subset \overline{G \cap H} \cup H^\flat$, hiszen H nyílt, ekkor $H^\flat$ zárt. Következésképpen $\overline{G} \cap H \subset \overline{G \cap H}$. Mivel G sűrű ($\overline{G} = M$) $H \subset \overline{G \cap H}$, ebből következően $\overline{H} \subset \overline{G \cap H}$, azonban $\overline{H} = M$, így $\overline{G \cap H} = M$
(ii) az előzőből egyszerű komplementációval adódik:

$$\left.\begin{array}{r} E \subset M\ E \text{ sűrű} \iff \overbrace{E^\flat}^{\circ} = \emptyset \\ E^\flat \text{ sűrű} \iff \overset{\circ}{E} = \emptyset \end{array}\right| \text{ hiszen } \overline{E}^\flat = \overbrace{E^\flat}^{\circ}.$$

Ha E nem sűrű, azaz $\overline{E} \neq M$, akkor $\overline{E}^{\complement}$ nem üres nyílt halmaz, szűkebb $E^{\complement}$-nél, tehát $E^{\complement}$ belseje nem üres. Ennek a felhasználásával (ii) komplementerképzéssel bizonyítható (i)-ből. ∎

Ugyanakkor ez az állítás megszámlálható sok halmazra általában nem igaz.

2.3.3. Állítás.

$$\begin{array}{ccc} H_n \ (n \in \mathbb{N}) \text{ nyílt} & & Z_n \ (n \in \mathbb{N}) \text{ zárt} \\ \overline{H_n} = M \Rightarrow \overline{\bigcap_n H_n} = M & \iff & \mathring{Z}_n = \emptyset \Rightarrow \overbrace{\bigcup_n Z_n}^{\circ} = \emptyset \end{array}$$

Bizonyítás Egyszerű komplementációval triviálisan bizonyítható.

2.3.4. Állítás. (Baire-féle kategóriatétel) *Teljes metrikus térben a fentiek igazak, azaz sűrű nyílt halmazok metszete is sűrű.*

$$H_n \ (n \in \mathbb{N}) \text{ nyílt } \overline{H_n} = M \Rightarrow \overline{\bigcap_n H_n} = M$$

Bár többnyire a másik alakját használjuk, mégis ezt mondjuk ki, mert ezt könnyebb belátni.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz $\exists H_n$ sűrű nyílt, hogy $\overline{\bigcap_n H_n} \neq M$.

Ekkor $\exists x \in M, r > 0 \ G_r(x) \cap \overline{\bigcap_n H_n} = \emptyset$, és $G_r(x) \cap H_1 \neq \emptyset$, hiszen H_1 sűrű és nyílt. Ebből következik, hogy $\exists x_1 \in M, \frac{r}{2} > r_1 > 0 \ \overline{G_{r_1}(x_1)} \subset G_r(x) \cap H_1$.

Mivel H_2 is sűrű, $G_{r_1} \cap H_2 \neq \emptyset$, és nyílt, így $\exists x_2 \in M, \frac{r}{4} > r_2 > 0 \ \overline{G_{r_2}(x_2)} \subset G_{r_1}(x_1) \cap H_1 \subset G_r(x) \cap H_1 \cap H_2$.

Ezt így folytatva azt kapjuk, hogy

$$\exists x_n \in M \ (n \in \mathbb{N}) \ \frac{r}{2^n} > r_n > 0 \quad \overline{G_{r_n}(x_n)} \subset G_{r_{n-1}} \cap H_n \Rightarrow \overline{G_{r_n}(x_n)} \subset G_r(x) \cap \bigcap_{k=1}^{n} H_k.$$

Ekkor az x_n sorozat, mivel $m > n \ d(x_n, x_m) < \frac{r}{2^n}$, Cauchy-sorozat, így a tér teljessége miatt

$$\exists \lim_n x_n =: x_0 \in \overline{\bigcap_n G_{r_n}(x_n)} \Rightarrow x_0 \in G_r(x) \cap \bigcap_n H_n,$$

ami a feltételezésünkkel ellentmond, így a bizonyítást befejeztük. ∎

Következmény Teljes metrikus térben nyílt halmaz nem állítható elő megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként.

2.4. A Banach–féle nyílt leképezések tétele

Legyen $(V, \|.\|)$ normált tér, $H \subset V, 0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$. Ekkor tudjuk, hogy $\alpha G_r(0) = G_{|\alpha| r}(0)$, és hogy $\overline{\alpha H} = \alpha \overline{H}$

2.4.1. Definíció. *Egy normált terek közötti leképezést* **nyílt***nak nevezünk, ha nyílt halmaz képe a leképezés által nyílt.*

2.4.1. Állítás. *Legyenek $(V, \|.\|)$ és $(U, \|.\|)$ normált terek (a két normát ugyanúgy jelöljük), $A : V \to U$ lineáris leképezés. Ekkor a következők egyenértékűek:*
(i) A nyílt
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \ G^U_{\delta_\varepsilon}(0) \subset A[G^V_\varepsilon(0)]$
(iii) $\exists \varrho > 0 \ \ G^U_\varrho(0) \subset A[G^V_1(0)]$

Bizonyítás (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\delta_\varepsilon := \varepsilon \varrho$, hiszen ekkor

$$A[G_\varepsilon(0)] = A[\varepsilon G_1(0)] = \varepsilon A[G_1(0)],$$

így

$$\varepsilon G_\varrho(0) = G_{\varepsilon\varrho}(0) \subset A[G_\varepsilon(0)]$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Legyen $H \subset V$ nyílt. Ekkor $y \in A[H] \ \ \exists x \in H \ \ y = Ax$. Mivel H nyílt, $\exists G_\varepsilon(x) = x + G_\varepsilon(0) \subset H$

Ugyanakkor $A[G_\varepsilon(x)] = Ax + A[G_\varepsilon(0)] \supset y + G_{\delta_\varepsilon}(0) = G_{\delta_\varepsilon}(y)$, mert $\exists\delta_\varepsilon$, hogy $G_{\delta_\varepsilon} \subset A[G_\varepsilon(0)]$, így $G_{\delta_\varepsilon}(y) \subset A[H]$, azaz $A[H]$ nyílt.
(i) $\Rightarrow$ (iii) ez triviális, hiszen

$$G_1^V(0) \text{ nyílt} \Rightarrow A[G_1^V(0)] \text{ nyílt},$$

és a nulla az utóbbinak is eleme a linearitás miatt. Mint minden pontja, ez is belső pont, így van egy ϱ sugarú környezete szintén ebben a halmazban. ∎

2.4.2. Állítás. *Legyen $A : V \to U$ lineáris, folytonos, V pedig teljes. Ekkor, ha $\exists r > 0$ $G_r^U(0) \subset \overline{A[G_1^V(0)]}$, akkor $\forall 0 < \varrho < r$ $G_\varrho^U(0) \subset A[G_1^V(0)]$*

Bizonyítás $\forall y \in G_r(0)$ $\forall 0 < \alpha < 1$ esetén

$$\exists y_1 \in G_{\alpha r}(y) \cap A[G_1(0)] \neq \emptyset,$$

hiszen benne van a lezártjában. Nézzük meg, mit is jelent ez! $\|y - y_1\| < \alpha r$ (mert y_1 $G_{\alpha r}(y)$ eleme), így $y \in A[G_1(0)]$, azaz $\exists x_1 \in G_1(0)$ $y_1 = Ax_1$. Speciálisan $y - y_1 \in G_{\alpha r}(0) \subset G_r(0)$, erre alkalmazva ugyanezt a gondolatmenetet, kapjuk, hogy

$$\exists y_2 \in G_{\alpha^2 r}(y - y_1) \cap A[G_\alpha(0)],$$

így $\|y - y_1 - y_2\| < \alpha^2 r$, szűkebb környezet $G_{\alpha r}(0) = \alpha G_r(0) \subset \alpha\overline{A[G_1(0)]} = \overline{A[G_\alpha(0)]}$.
Így indukcióval kapjuk, hogy

$$\exists y_n \in G_{\alpha^n r}(y - \sum_{k=1}^{n-1} y_k) \cap A[G_{\alpha^{n-1}}(0)], \qquad \left\| y - \sum_{k=1}^{n-1} y_k \right\| < \alpha^n r, \quad \exists x_n \in G_{\alpha^{n-1}}(0) \quad y_n = Ax_n.$$

Ekkor

$$y = \sum_n y_n, \quad \|x_n\| < \alpha^{n-1},$$

így a $\sum_n x_n$ sor abszolút konvergens. Ebből következően konvergens is, azaz $\exists x := \sum_n x_n$, és $Ax = A\sum_n x_n = \sum_n Ax_n = y$, továbbá $\|x\| \le \frac{1}{1-\alpha}$,tehát

$$A[G_{1/(1-\alpha)}(0)] \supset G_r(0),$$

ezt $1-\alpha$-val beszorozva, a sorrendet megfordítva

$$G_{(1-\alpha)r}(0) \subset A[G_1(0)],$$

$\varrho := (1-\alpha)r$, ez minden 0 és egy közötti α-ra jó volt, így minden 0 és r közötti ϱ kiadódik. ∎

2.4.3. Állítás. (Banach-féle nyílt leképezések tétele) *Legyen V és U Banach-tér, $A : V \to U$ folytonos lineáris leképezés. Ekkor a következők egyenértékűek:*
(i) A ráképezés
(ii) A nyílt

Bizonyítás (ii) $\Rightarrow$ (i) triviális, hiszen $\operatorname{Ran} A$ lineáris altér U-ban. Ha A nyílt, akkor, mivel $G_1(0)$ nyílt, $A[G_1(0)]$ is nyílt U-ban. Ebből következően (ld. fent) $\exists\varrho > 0 : G_\varrho(0) \subset A[G_1(0)] \subset \operatorname{Ran} A$, mivel ez utóbbi lineáris altér, ezért $U = \mathbb{K}G_\varrho(0) \subset \operatorname{Ran} A$
(i) $\Rightarrow$ (ii) már egy kicsit kacifántosabb. Ekkor, mivel A ráképezés $\bigcup_n A[G_n^V(0)] = U$. Ugyanakkor U a tétel feltételei szerint teljes, és itt megszámlálható sok halmaz uniójaként állítjuk elő, így a 2.3.4.. állítás, azaz a Baire-féle kategóriatétel miatt nem lehet mindegyik sehol sem sűrű:

$$\exists m \quad \overset{\circ}{\overline{A[G_m(0)]}} \neq \emptyset,$$

és felhasználva azt a lemmát, hogy egy halmaz nem lehet diszjunkt a lezártjának a belsejétől

$$\exists y \in A[G_m(0)] \;\; \exists r > 0 : G_r(y) \subset \overline{A[G_m(0)]},$$

ekkor $y = Ax$, $x \in G_m(0)$, így

$$G_r(0) = G_r(y) - y = G_r(y) - Ax \subset \overline{A[G_m(0)]} - Ax = \overline{A[G_m(0) - x]} \subset \overline{A[G_{2m}(0)]},$$

hiszen $x \in G_m(0)$. Ekkor $G_r(0) \subset \overline{A[G_{2m}(0)]}$, ezt átrendezve:

$$G_{r/2m}(0) \subset \overline{A[G_1(0)]},$$

ahonnan az előző állítások felhasználásával éppen a kívánt eredményt kapjuk. ■

A lemma bizonyítása: Legyen H nem seholsem sűrű halmaz. Ekkor $\overset{\circ}{\overline{H}} \neq \emptyset$, ebből következően $\exists G_r(x) \subset \overline{H}$, ekkor $\exists y \in H \cap G_r(x)$.

Következmény A fenti állítás fontos következménye, hogy ha V és U Banach-terek, és $A : V \to U$ folytonos lineáris bijekció, akkor A^{-1} is folytonos, hiszen A nyílt, a folytonosság definíciója pedig éppen az, hogy nyílt halmaz ősképe nyílt.

Így már a következő esetekben tudjuk, hogy egy bijekció inverze folytonos:

- Ha kompakt halmazon értelmezett, folytonos
- Ha intervallumon értelmezett, valós értékű, folytonos
- Ha Banach-téren értelmezett.

2.5. A zárt grafikon tétele

2.5.1. Állítás. *Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $H \subset M$ zárt. Ekkor, ha $f : H \to M'$ folytonos, akkor $\operatorname{Graph} f$ is zárt $M \times M'$-ben*

Bizonyítás Szinte triviális. Legyen $(x_n, f(x_n))$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat a grafikonban, és legyen x_n konvergens. Ekkor

$$x := \lim_n x_n \in H \quad y = \lim_n f(x_n) = f(x),$$

ahol az első azért teljesül, mert H zárt, a második pedig azért, mert f folytonos. Így $(x, y) \in \operatorname{Graph} f$. ■

Az állítás megfordítottja azonban nem igaz, vegyük a következő függvényt:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1/x & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Ennek a grafikonja és az értelmezési tartománya is zárt, azonban nem folytonos.

2.5.2. Állítás. (A zárt grafikon tétele) *Legyen V és U Banach tér, $A : V \rightarrowtail U$ lineáris leképezés. Ekkor a következők közül akármelyik kettő maga után vonja a harmadikat:*
(i) $\operatorname{Dom} A$ zárt
(ii) $\operatorname{Graph} A$ zárt
(iii) A folytonos

Bizonyítás (i),(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\operatorname{Graph} A \subset V \times U$, és zárt lineáris altér. $V \times U$ az ekvivalens szorzat-metrikákkal teljes, és teljes tér zárt részhalmaza teljes, így $\operatorname{Graph} A$ Banach–tér. Legyen pr_V a szokásos projekció. Ekkor

$$\mathrm{pr}_V|_{\operatorname{Graph} A} : \operatorname{Graph} A \to \operatorname{Dom} A$$

folytonos lineáris bijekció, ebből következően (ld. a Banach–féle nyílt leképezések tétele után mondottakat) az inverze

$$\left(\mathrm{pr}_V|_{\operatorname{Graph} A}\right)^{-1},$$

is folytonos. Így

$$A = \mathrm{pr}_U \circ \left(\mathrm{pr}_V|_{\operatorname{Graph} A}\right)^{-1}$$

folytonos leképezések kompozíciója, tehát folytonos.

(i),(iii) $\Rightarrow$ (ii) az előző állítás, ehhez még az sem kell, hogy V és U Banach–tér legyen.

(ii),(iii) $\Rightarrow$ (i) Legyen $x_n \in \operatorname{Dom} A$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergens, legyen $x := \lim_n x_n$. Meg kell mutatni, hogy ez A értelmezési tartományának eleme.

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \|x_n - x_m\|,$$

tehát ez Cauchy-sorozat, U teljes, így $\exists \lim_n Ax_n$. Ekkor mivel A folytonos $\exists \lim_n (x_n, Ax_n)$, és ez a grafikon zártsága miatt annak az eleme, ebből következően $x \in \operatorname{Dom} A$ ■

Érdemes megfigyelni, hogy a „nagy" tételek közül csak az elsőben használtuk fel a nyílt leképezések tételét, a többit egyszerű eszközökkel lehetett bizonyítani.

2.5.1. Definíció. *Legyen V és U Banach–tér, $A : V \rightarrowtail U$ lineáris leképezés. Erről azt mondjuk, hogy* **zárt**, *ha a grafikonja zárt.*

A továbbiakban fontos szerepe lesz a zárt lineáris leképezéseknek. A zárt lineáris leképezés nem tévesztendő össze azzal, hogy egy leképezést akkor nevezünk zártnak, ha zárt halmazt zárt halmazra képez.

Két zárt leképezés összege nem biztos, hogy zárt, erre példát is mutatunk. Legyen $A : V \rightarrowtail U$ zárt, de nem folytonos leképezés, úgy, hogy $\operatorname{Dom} A \neq V$, de $\overline{\operatorname{Dom} A} = V$. Ekkor $-A$ is ugyanilyen tulajdonságú. Ekkor

$$A + (-A) = 0|_{\operatorname{Dom} A},$$

és a 0 folytonos, az értelmezési tartománya nem zárt, így nem lehet zárt.

Az viszont igaz, hogy ha A zárt, akkor αA is zárt, ha $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$.

2.5.3. Állítás. *Legyenek V, U Banach–terek, $A : V \rightarrowtail U$ lineáris leképezés. Ekkor a következők ekvivalensek:*
(i) A zárt
(ii) $x_n \in \operatorname{Dom} A, \exists \lim_n x_n =: x$ és $\exists \lim_n Ax_n =: y \Rightarrow x \in \operatorname{Dom} A, y = Ax$

Bizonyítás triviális, hiszen a jobb oldal éppen a grafikon zártságának a sorozatokkal való megfogalmazása. ■

A számszoros zártsága ezzel triviálissá válik, viszont az összegről még nem tudunk semmit. Ezen változtat a következő állítás:

2.5.4. Állítás. *Legyen V és U Banach–tér, $A, B : V \rightarrowtail U$ lineáris, A zárt, B folytonos, úgy hogy $\operatorname{Dom} A \subset \operatorname{Dom} B$. Ekkor $A + B$ zárt.*

Bizonyítás Ekkor $\operatorname{Dom}(A + B) = \operatorname{Dom} A$. Legyen $x_n \in \operatorname{Dom} A$, úgy, hogy

$$\exists \lim_n x_n =: x \in \operatorname{Dom} A \subset \operatorname{Dom} B \text{ és } \exists \lim_n (A + B)x_n =: y \tag{*}$$

ekkor $\exists \lim_n Bx_n$, hiszen B folytonos. (*)-ból és ebből következik, hogy $\exists \lim_n Ax_n$, és mivel A zárt, $x \in \operatorname{Dom} A$ és $\lim_n Ax_n = Ax$. Továbbá, mivel B folytonos, és $\operatorname{Dom} A \subset \operatorname{Dom} B$, így $\lim_n Bx_n = Bx$, ezeket mind összevetve adódik, hogy

$$x \in \operatorname{Dom} A = \operatorname{Dom}(A + B) \quad y = \lim_n (A + B)x_n = (A + B)x,$$

és készen vagyunk. ■

2.5.5. Állítás. *Ha $A : V \rightarrowtail U$ zárt és injektív, akkor A^{-1} is zárt.*

A bizonyításhoz csak fel kell írni, hogy mi az inverz grafikonja.

2.5.2. Definíció. *$A : V \rightarrowtail U$ lineáris leképezést* **lezárható***nak nevezzük, ha $\overline{\operatorname{Graph} A}$ egy lineáris leképezés grafikonja.*

Nem minden lineáris leképezés lezárható, erre majd példát is adunk.

2.5.6. Állítás. *Legyen $B, A : V \rightarrowtail U$ leképezés, úgy, hogy $A \subset B$ és B zárt. Ekkor A lezárható, és $\overline{A} \subset B$*

2.6. A Banach–Steinhaus-tétel

2.6.1. Állítás. (Banach–Steinhaus-tétel (egyenletes korlátosság tétele)) *Legyen V Banach–tér, U normált tér, $H \subset \mathcal{L}in(V, U)$. Ekkor H pontosan akkor korlátos, ha $\forall x \in V$ $\{Ax | A \in H\}$ korlátos.*

Bizonyítás Először írjuk le, hogy melyik mit jelent: H akkor korlátos, ha $\exists L > 0\ \forall A \in H\ \|A\| \leq L$. Ezután $(\Rightarrow)$ triviális, hiszen a norma definíciójából adódóan $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \leq L\|x\|$.

$(\Leftarrow)$ Legyen

$$Z_n := \bigcap_{A \in H} \overset{-1}{A}\left(\overline{G_n^U(0)}\right),$$

ami zárt, hiszen zárt halmazok folytonos függvény általi ősképeinek metszete.

$$\bigcup_n Z_n = V,$$

hiszen különben A nem lenne korlátos. ($x \in V$ valamilyen sugarú gömbben biztosan benne van.) A Z_n-ek tehát zártak, és megszámlálható sokan vannak. Mivel V teljes, a 2.3.4.. állítás (Baire–féle kategóriatétel) miatt nem lehet mindegyik sehol sem sűrű, azaz

$$\exists m\ \ \overset{\circ}{Z}_m \neq \emptyset,$$

így

$$\exists G_r(x_0) \subset Z_m$$

és

$$\forall x \in G_r(x_0)\ \forall A \in H\ \|Ax\| \leq m.$$

Legyen $A \in H$ és $\|x\| < 1$. Ekkor mivel $\|x\| < 1$, $\|rx\| < r$, $x_0 + rx \in G_r(x_0)$. Ekkor $\|A(x_0 + rx)\| \leq m$, ennek felhasználásával

$$\|Ax\| = \frac{1}{r}\|A(rx)\| = \frac{1}{r}\|A(rx + x_0 - x_0)\| \leq \frac{1}{r}(\|A(rx + x_0)\| + \|Ax_0\|) \leq \frac{2m}{r}\ (\forall A \in H),$$

így

$$\forall A \in H\ \ \|A\| \leq \frac{2m}{r},$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani. ∎

2.6.2. Állítás. (Banach–tétel) *Legyen V Banach-tér, U normált tér és $A_n \in \mathcal{L}in(V,U)$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor, ha $\forall x \in V\ \ \exists \lim_n A_n x =: Ax$, akkor $A \in \mathcal{L}in(V,U)$ és $\|A\| \leq \sup_n \|A_n\| < \infty$*

Bizonyítás A linearitása a határértékképzés és a lineáris műveletek felcserélhetősége miatt triviális. Be kell még látnunk, hogy A folytonos. Ekkor $H := \{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ folytonos lineáris leképezések egy halmaza, és $\forall x \in V\ \ \{A_n x | n \in \mathbb{N}\}$ korlátos, mert konvergens. Ebből a Banach–Steinhaus-tétel miatt $\exists L > 0,\ \ \|A_n x\| \leq L\ \ \forall n$, így

$$\|Ax\| = \|\lim_n A_n x\| = \lim_n \|A_n x\| \leq \lim_n \|A_n\|\|x\| \leq L\|x\|,$$

tehát A korlátos, és

$$\|A\| \leq \sup_n \|A_n\|,$$

és ezzel a bizonyítást befejeztük. ∎

Most tehát láttuk, hogy ha van egy pontonként konvergens, folytonos függvényekből álló függvénysorozatunk, és még *lineárisak és teljes téren értelmezettek*, akkor a határértékük is folytonos, azonban ezek a feltételek is fontosak.

2.7. A Hahn–Banach-tétel

2.7.1. Definíció. *Egy V normált tér* **(topológikus algebrai) duálisá***nak a $V' := \mathcal{L}in(V, \mathbb{K})$ teret nevezzük, az indukált normával.*

A lineáris algebrában a duális egyik legfontosabb tulajdonsága a szétválasztási tulajdonság volt. Továbbá fontos volt egy lineáris tér biduálisa $(V^*)^* =: V^{**}$.

A biduális $V'' := (V')'$ most is értelmes, ennek a tulajdonságait fogjuk a következőkben vizsgálni. Sajnos, most nem lesz olyan egyszerű a helyzet, mint a véges dimenziós esetben.

Azt tudjuk, hogy V' Banach–tér, és hogy V beinjektálható a biduálisába, ha az alábbi $x \mapsto i_x$ leképezés injektív:

$$x \in V \quad i_x \in V'' : p \mapsto i_x(p) := (p|x),$$
$$V \Rrightarrow V'' \quad x \equiv i_x,$$

hiszen i_x triviálisan folytonos, mert $|(p|x)| \leq \|p\|\|x\|$.

Azt tudjuk, hogy ha V véges dimenziós, akkor $V \equiv V^{**}$, azonban azt biztosan tudjuk, hogy ha V nem teljes normált tér, akkor ez nem tehető meg.

2.7.2. Definíció. *A V Banach–teret* **reflexív***nek nevezzük, ha $V \equiv V''$.*

2.7.1. Állítás. *Legyen V valós vektortér, $L \subset V$ lineáris altér, és $f : L \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, p pedig félnorma V-n, azaz $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, és $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $\lambda \geq 0$. Ha $f \leq p|_L$, akkor $\exists F : V \to \mathbb{R}$ lineáris, $f \subset F$, $F \leq p$*

Bizonyítás ha $L = V$, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor $\exists x_1 \in V \setminus L$ ($x_1 \neq 0$, hiszen akkor L eleme lenne), és

$$\forall x, y \in L \quad f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_1) + p(x_1 + y).$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$f(x) - p(x - x_1) \leq p(x_1 + y) - f(y),$$

így

$$\alpha := \sup_{x \in L} \left(f(x) - p(x - x_1)\right)$$

véges lesz, hiszen

$$f(x) - p(x - x_1) \leq \alpha \leq p(x_1 + y) - f(y) \quad \forall x, y \in L. \tag{*}$$

Vegyük az $L + \mathbb{R}x_1$ alteret! Ekkor természetesen $L \subsetneq L + \mathbb{R}x_1 =: L_1$, így a következő definíció jó:

$$f_1 := (L_1 \to \mathbb{R}, x + \lambda x_1 \mapsto f(x) + \lambda\alpha),$$

az L_1 altéren értelmezett lineáris leképezés, hiszen L és $\mathbb{R}x_1$ kiegészítő alterek $L + \mathbb{R}x_1$-ben. Természetesen $f \subset f_1$. Azt kell csak megmutatnunk, hogy

$$f_1 \leq p|_{L_1}.$$

Ez teljesül, mert

$$\begin{aligned}\lambda > 0 \quad f_1(x + \lambda x_1) &= f(x) + \lambda\alpha = \lambda\left(f\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \alpha\right)\\ &\leq \lambda\left(f\left(\frac{x}{\lambda}\right) + p\left(x_1 + \frac{x}{\lambda}\right) - f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) = p(x + \lambda x_1)\end{aligned},$$

és

$$\begin{aligned}\lambda < 0 \quad f_1(x + \lambda x_1) &= f(x) - |\lambda|\alpha = |\lambda|\left(f\left(\frac{x}{|\lambda|}\right) - \alpha\right)\\ &\leq |\lambda|\left(f\left(\frac{x}{|\lambda|}\right) - f\left(\frac{x}{|\lambda|}\right) + p\left(\frac{x}{|\lambda|} - x_1\right)\right) = p(x + \lambda x_1),\end{aligned}$$

így f_1 akkor is majorálható p által, ha $\lambda < 0$. Ekkor, mivel így csak véges dimenziós esetben operálhatnánk, vezessük be a következő halmazt

$$\mathcal{F} := \{\Phi : V \rightarrowtail \mathbb{R} \text{ lineáris} | f \subset \Phi, \Phi \leq p|_{\mathrm{Dom}\,\Phi}\}.$$

Ez nem üres halmaz, és rajta a halmazelméleti tartalmazás rendezés. Legyen $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ lánc, és ennek maximális eleme $\cup\mathcal{L}$! Ekkor

$$\mathrm{Dom} \cup \mathcal{L} = \bigcup_{\Phi \in \mathcal{L}} \mathrm{Dom}\,\Phi \ni x \quad x \mapsto \Phi(x),$$

ez jól definiált, mert $\mathcal{L}$ elemei egymás kiterjesztései. $\cup\mathcal{L}$ lineáris, hiszen ha

$$x, y \in \mathrm{Dom} \cup \mathcal{L}, \text{akkor valamelyikre már } x, y \in \mathrm{Dom}\,\Phi \Rightarrow (x+y) \in \mathrm{Dom}\,\Phi,$$

szintén az előző érvek alapján, és Φ lineáris. p majorálja $\cup\mathcal{L}$-et, hiszen $\mathcal{F}$ valamennyi elemét majorálja.

A Zorn-lemma miatt $\exists F \in \mathcal{F}$ maximális elem, és tudjuk, hogy $\mathrm{Dom}\,F = V$, hiszen ellenkező esetben az első lépés szerint kiterjeszthetnénk, és ez ellentmondana annak, hogy maximális. ∎

2.7.2. Állítás. (Hahn–Banach-tétel) *Legyen V vektortér, p félnorma V-n, $L \subset V$ lineáris altér, $f : L \to \mathbb{K}$ lineáris, úgy, hogy $|f| \le p|_L$ Ekkor*

$$\exists F : V \to \mathbb{K} \ \ \text{lineáris} \quad f \subset F, \quad |F| \le p$$

Bizonyítás ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) esetben az előzőből következik, hiszen $f(x) \le p(x)$, és $f(-x) = -f(x) \le p(-x) = p(x)$, azaz $f \le p \iff |f| \le p$, így f kiterjeszthető, a kiterjesztésre ugyanezzel a gondolatmenettel $|F| \le p$.

($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) esetben a bizonyítás azon múlik, hogy egy komplex lineáris leképezés valós és képzetes része kölcsönösen meghatározza egymást, így elég az egyiket kiterjeszteni:

$$U : V \to \mathbb{C} \text{ lineáris, így } U =: U_1 + iU_2 \ \ (U_1, U_2 : V \to \mathbb{R}),$$

ekkor

$$U(ix) = iU(x), \quad U_1(ix) + iU_2(ix) = iU_1(x) - U_2(x) \Rightarrow U_2(x) = -U_1(ix).$$

Tehát

$$\mathfrak{Re}\, f : V \to \mathbb{R}, \ \ \mathbb{R}\text{-lineáris}, \quad |\mathfrak{Re}\, f| \le |f| \le p|_L\,,$$

így az előzőek alapján

$$\exists \Phi : V \to \mathbb{R}, \ \ \mathbb{R}\text{-lineáris}, \quad \mathfrak{Re}\, f \subset \Phi, \quad |\Phi| \le p.$$

Ekkor

$$F(x) := \Phi(x) - i\Phi(ix), \quad F : V \to \mathbb{C} \ \mathbb{C}\text{-lineáris}, \quad f \subset \Phi.$$

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy $|F|$-et is majorálja a p:

$$|F(x)| = \alpha(x)F(x) = F(\alpha(x)x) = \Phi(\alpha(x)x) - i\Phi(i\alpha(x)x) = \Phi(\alpha(x)x) \le p(\alpha(x)x)) = |\alpha(x)|p(x) = p(x),$$

mert $\alpha(x) \in \mathbb{S}^1$, és ezzel a bizonyítást befejeztük. ∎

Következmény Legyen V normált tér, $M \subset V$ zárt lineáris altér, és $f : M \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris függvény (azaz $f \in M'$), ekkor $\exists F \in V'$ úgy, hogy $f \subset F$, és $\|f\| = \|F\|$

2.7.3. Állítás. (Szétválasztási tulajdonság) *V' elemei szétválasztják V pontjait, azaz*
(i) ha $x, y \in V$, $x \ne y$, akkor $\exists p \in V'$, hogy $(p|x) \ne (p|y)$
(ii) $\forall 0 \ne x \in V \quad \exists p \in V' \quad (p|x) \ne 0$
(iii) $x \in V$ és $(p|x) = 0 \ \ \forall p \in V' \Rightarrow x = 0$
és ez a három ekvivalens.

Bizonyítás Az ekvivalencia triviális, a középsőt bizonyítjuk. $\mathbb{K}x$ zárt lineáris altér. $f(\lambda x) := \lambda\|x\| \ne 0$ lineáris leképezés az egydimenziós altéren. Ekkor ennek a kiterjesztettje a tételnek megfelelő leképezés. ∎

2.7.4. Állítás. *Legyen $(V, \|.\|)$ normált tér, $M \subset V$ zárt lineáris altér. Ha $x \in V \setminus M$, akkor $\exists p \in V'$ $p|_M = 0$, $(p|x) = \|x\|$*

Bizonyítás $f : M + \mathbb{K}x \to \mathbb{K}$, $z + \lambda x \mapsto \lambda\|x\|$ folytonos lineáris leképezés, hiszen $M \oplus \mathbb{K}x$ zárt lineáris alterek, $|f(z + \lambda x)| \le |\lambda|\|x\| \le \|z + \lambda x\|$ (ld. a 2.8.2.. állítást). Ekkor van olyan kiterjesztése, amit a norma továbbra is majorál. Ennek az állításnak speciális esete $M = \{0\}$ esetben a szétválasztási tulajdonság. ∎

2.7.5. Állítás. *Legyen $(V, \|.\|)$ normált tér, $x \in V$. Ekkor*

$$\|x\| = \sup_{\substack{p \in V' \\ \|p\| = 1}} |(p|x)|$$

Bizonyítás ($\ge$) triviális, hiszen V' elemei folytonosak, és a normájuk definíciójából következően $|(p|x)| \le \|p\|\|x\|$ ($\forall p \in V,$). A másik irány pedig a Hahn–Banach-tétel következménye: a szétválasztásból következően van olyan funkcionál V'-ben, ami ezt felveszi. ∎

Most már látjuk, hogy a fejezet elején említett injekció

$$v \Rrightarrow V'' \quad x \equiv i_x$$

izometrikus, hiszen definíció szerint $\|i_x\| = \sup_{\|p\|=1} |(i_x|p)|$, és a fenti állítás szerint $\|x\|$ ezzel megegyezik. Tehát

$$\|i_x\| = \|x\| \quad (x|p) = (p|x).$$

2.8. A tételek fontosabb következményei

2.8.1. Állítás. *Legyen V vektortér, $\|.\|$ és $\|.\|'$ norma V-n, és V mindkettőre nézve teljes. Ekkor, ha a két norma összehasonlítható, akkor ekvivalensek.*

Bizonyítás a két norma összehasonlítható, legyen mondjuk $\exists \alpha > 0 \quad \|.\|' < \alpha \|.\|$. Ekkor $\mathrm{id}_V : (V, \|.\|) \to (V, \|.\|')$ folytonos lineáris bijekció, $\|\mathrm{id}_V(x)\|' \leq \alpha \|x\|$, így a 2.4.3.. állítás (nyílt leképezések tétele) miatt az inverze is folytonos:

$$\exists \beta > 0 \quad \|\mathrm{id}_V(x)\| \leq \beta \|x\|',$$

és ezzel a bizonyítást befejeztük. ∎

2.8.2. Állítás. *Legyen V és U Banach–tér, $N, M \subset V = M \oplus N$ zárt lineáris alterek, $A : M \to U$ és $B : N \to U$ folytonos lineáris leképezések. Ekkor létezik egy $C : M \oplus N \to U, \quad x \in M, \quad y \in N \quad x + y \mapsto Ax + By$ folytonos lineáris leképezés.*

Bizonyítás A fenti leképezés nyilván lineáris, azt kell csak bizonyítanunk, hogy folytonos.

$$\|Ax + By\| \leq \|Ax\| + \|By\| \leq \|A\|\|x\| + \|B\|\|y\| \leq (\|A\| + \|B\|)(\|x\| + \|y\|),$$

és mivel $V = M \oplus N \equiv M \times N$, ezen az „egyes" szorzatnorma és az eredeti norma a háromszögegyenlőtlenség miatt összehasonlítható, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, így ez a két norma az előző állítás miatt ekvivalens. ∎

2.8.3. Állítás. *Legyen $A : V \rightarrowtail U$ lineáris leképezés. Ha A zárt, akkor $\mathrm{Ker}\, A$ is zárt.*

Bizonyítás Legyen $x_n \in \mathrm{Ker}\, A$ konvergens sorozat, $\exists x := \lim_n x_n$. Ekkor mivel A zárt, (azaz a grafikonja zárt) és $(x_n, Ax_n) \in \mathrm{Graph}\, A$ és $Ax_n = 0$, így $(x, 0) = \lim_n (x_n, Ax_n) \in \mathrm{Graph}\, A$, ebből következően $Ax = 0$. ∎

2.8.4. Állítás. *Legyen V Banach–tér, $M, N \subset V$ lineáris alterek úgy, hogy $V = M \oplus N$. Ekkor az M mentén N-re vetítő projektor pontosan akkor folytonos, ha M és N zárt.*

Bizonyítás ($\Rightarrow$) triviális, hiszen

$$M = \mathrm{Ker}\, P \quad N = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_V - P),$$

és ha egy leképezés folytonos, akkor a $\{0\}$ egyelemű (így zárt) halmaz őskėpe zárt.

($\Leftarrow$) már nem ilyen egyszerű. Elég megmutatnunk, hogy P zárt, hiszen ekkor a 2.5.1.. állítás (zárt grafikon tétele) miatt (mivel az egész tér, azaz az értelmezési tartomány zárt) már következik a tétel igazsága. A zártság a következőt jelenti:

$$x_n \in V \quad \left.\begin{array}{r} \exists \lim\limits_n x_n =: x \\ \exists \lim\limits_n P x_n =: y \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \mathrm{Dom}\, P \quad Px = y.$$

Az, hogy $x \in \mathrm{Dom}\, P$ legyen, teljesül, hiszen P mindenhol értelmezett, már csak azt kell bebizonyítani, hogy $Px = y$. Mivel $Px_n \in M$ és M, N zárt

$$y \in M, \quad \text{és} \quad Py = y. \tag{*}$$

Ekkor

$$\lim_n (\mathrm{id}_V - P) x_n = \lim_n (x_n - P x_n) = x - y \in M,$$

így

$$P(x - y) = 0 \quad Px = Py \underset{(*)}{=} y,$$

és ezzel a bizonyítást befejeztük. ∎

2.8.1. Definíció. *Legyen V vektortér, $p : V \to \mathbb{R}_0^+$ félnorma. Ekkor $Z := \{x \in V | p(x) = 0\}$ lineáris altér. Ekkor a $V \backslash Z$ faktortéren bevezetett*

$$\|x + Z\| := p(x)$$

normát a p **félnormához asszociált normá***nak nevezzük.*

A definíció jó, mert triviálisan valamennyi, egy ekvivalencia–osztályba tartozó elem félnormája ugyan annyi, hiszen $p(x+y) \le p(x) + p(y)$, és az így definiált leképezés valóban norma, hiszen

$$\|\lambda(x+Z)\| = p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = |\lambda| \|x+z\|,$$

$$\|(x+Z)+(y+Z)\| = \|(x+y)+Z\| = p(x+y) \le p(x) + p(y) = \|x+Z\| + \|y+Z\|,$$

és

$$\|x+Z\| = 0 \iff p(x) = 0 \iff x \in Z \iff x + Z = Z,$$

ami $V \backslash Z$ nulleleme.

Ennek speciális esete: $\mathbb{K}^N$ -en félnorma $p(x) := \sum_{k=1}^M |x_k|$, ekkor $Z = \{0\} \times \mathbb{K}^{N-M}$, és $\mathbb{K}^N = \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^{N-M}$, tehát $\mathbb{K}^N \backslash Z = \mathbb{K}^M$, és $\|.\|_1$ a félnormához asszociált norma.

Az $\mathcal{L}^p$ teljes burok–terek képzése az L^p terekből is a p–félnormához asszociált norma képzése volt. Ennek pontos részletei illetően lásd: Matolcsi: Analízis V.

2.8.5. Állítás. *Legyen $(V, \|.\|)$ normált tér, $L \subset V$ lineáris altér, $x \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor*

$$d(\lambda x, L) = |\lambda| d(x, L)$$

Bizonyítás Ha $\lambda = 0$, akkor triviálisan készen vagyunk. Ha nem, akkor definíció szerint

$$d(\lambda x, L) = \inf_{y \in L} \|\lambda x - y\| = |\lambda| \inf_{\frac{y}{\lambda} \in L} \left\| x - \frac{y}{\lambda} \right\| = |\lambda| d(x, L),$$

hiszen L lineáris altér, miközben $\frac{y}{\lambda}$ befutja, y is befutja. ■

2.8.6. Állítás. *Legyen V reflexív Banach–tér $\mathbb{C}$ felett. Ekkor, ha $f : \mathbb{C} \to V$ differenciálható, akkor analítikus.*

Bizonyítás Tudjuk, hogy ha f differenciálható, akkor

$$\forall p \in V' \quad p \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ differenciálható } \Rightarrow \text{ analítikus},$$

azaz

$$a, z \in \operatorname{Dom} f \quad (p|f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(p)(z-a)^n,$$

és meg tudjuk adni a $c_n(p)$ együtthatókat:

$$c_n(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(a)} \frac{(p|f(w))}{(w-a)^{n+1}} dw,$$

ezt felírva p_1-re és p_2 -re is:

$$\begin{aligned}(p_1 + p_2|f(z)) &= \sum_{n=0}^{\infty} (c_n(p_1) + c_n(p_2))(z-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(p_1+p_2)(z-a)^n,\end{aligned}$$

így az együtthatók egyenlőségéből

$$c_n(p_1+p_2) = c_n(p_1) + c_n(p_2),$$

hasonló gondolatmenettel a számszoros esetére is belátható, hogy

$$V' \to \mathbb{C}, \quad p \mapsto c_n(p)$$

lineáris leképezés, és ha folytonos (ld. később), akkor a Banach–tér reflexív lévén

$$\exists | c_n \in V \quad c_n(p) = (p|c_n),$$

így a folytonosság miatt p a fentiekből kiemelhető,

$$(p|f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(p)(z-a)^n = \left(p \,\middle|\, \sum_n c_n (z-a)^n \right).$$

Tehát már csak azt kell megmutatnunk, hogy $c_n(p)$ folytonosan függ p-től:

$$|c_n(p)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_r(a)} \frac{(p|f(w))}{(w-a)^{n+1}}\right| \leq \max_{w\in C_r(a)} |(p|f(w)|\frac{1}{r^n} \leq \|p\| \max_{C_r(a)} \|f\|,$$

ami egy konkrét szám, hiszen f folytonos (sőt, differenciálható) és így a folytonosság tényleg teljesül, hiszen felülről becsülhető.

Meg kell még mutatnunk a fenti összegek konvergenciáját. A Cauchy–féle gyökkritériumot fogjuk alkalmazni (ld. Gruber: Analízis III.):

$$\limsup_n \sqrt[n]{\|c_n\|} \leq \limsup_n \sqrt[n]{\max_{C_r(a)} \|f\|}\frac{1}{r} = \frac{1}{r},$$

azaz a fenti sor konvergenciasugara éppen akkora, mint a $p \circ f$ függvénynél szereplő soré, arról pedig tudjuk, hogy analítikus, így a bizonyítást befejeztük. ■

2.8.7. Állítás. *Normált térben zárt lineáris altér és véges dimenziós altér összege zárt.*

Bizonyítás Elég egydimenziósra belátni. Tehát legyen V normált tér, $M \subset V$ zárt lineáris altér, és $z \notin M$ továbbá x_n és λ_n olyan sorozat, hogy $\exists \lim_n(x_n + \lambda_n z)$. Ekkor a Hahn–Banach-tétel (2.7.2.. állítás) szerint

$$\exists p \in V' \quad p|_M = 0 \quad (p|z) = \|z\|$$

és így, mivel V' elemei folytonosak

$$\exists \lim_n (p|x_n + \lambda_n z) = \lim_n (p|\lambda_n z) = \lim_n |\lambda_n| \|z\|,$$

amiből következően

$$\exists \lim_n \lambda_n =: \lambda \Rightarrow \exists \lim_n x_n =: x \in M,$$

hiszen M zárt. így

$$\lim_n (x_n + \lambda_n z) = x + \lambda z \in M + \mathbb{K}z,$$

tehát $m + \mathbb{K}z$ valóban zárt. ■

2.9. Konkrét Banach–terek duálisa

2.9.1. Állítás. *Legyen K kompakt metrikus tér. Ekkor $(C(K), \|.\|_\infty)$ Banach–tér. Ekkor ennek a duálisa a K Radon–mértékeinek halmaza, a pontonkénti műveletekkel vektortérré téve.*

Bizonyítás Azt tudjuk, hogy kompakt tér Radon–mértékének variációja véges mérték. Azt is tudjuk a Radon–mértékek a pontonkénti műveletekkel vektorteret alkotnak. Ezen a következőképpen adhatunk meg normát:

$$\|m\| := |m|(K).$$

Azt, hogy ez a tér Banach–tér, nem mutatjuk meg, az nyilvánvaló, hogy

$$T_m : C(K) \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto \int_K f dm$$

folytonos lineáris leképezés, hiszen

$$\left|\int_K f dm\right| \leq \int_K |f| d|m| \leq \|f\| \|m\|,$$

tehát minden Radon–mértékhez tartozik egy $C(K)'$-beli elem, és az $m \mapsto T_m$ leképezés lineáris. Már csak azt kell megmutatnunk, hogy ez a leképezés injektív, azaz

$$T_m = 0 \Rightarrow m = 0.$$

Ez annak a következménye, hogy bármely $H \subset K$ kompakt halmazhoz megadható olyan $\varphi_{H,n}$ függvény, amely a halmaz pontjaiban 1, $1/n$ sugarú környezetében 0 és 1 között van, azon kívül pedig nulla. Ekkor a Lebesgue–tétel segítségével megmutatható, hogy

$$\lim_n (T_m|\varphi_{H,n}) = \lim_n \int_K \varphi_{H,n} dm = \int_K \chi_H dm = m(H),$$

és ha ez egy az összes Borel–halmazt generáló félgyűrűn (pl. a kompakt halmazokon) nulla, akkor a mértékek egyértlemű kiterjeszthetősége miatt $m = 0$.

Azt is meg lehet mutatni, hogy

$$\|T_m\| = \|m\|,$$

hiszen feljebb adtunk már ilyen felső becslést, és vehetünk egy olyan függvénysorozatot $C(K)$-ban, amelynek határértéke K^+-on 1, K^--on pedig -1. Az, hogy ez az injekció szűrjekció is, a következő tétel része ∎

2.9.2. Állítás. (Riesz–féle reprezentációs tétel) *A fenti $m \mapsto T_m$ leképezés szűrjekció, azaz az előző tétellel együtt $C(K)'$ azonosítható a K Radon–mértékeinek terével.*

Ezt a tételt nem bizonyítjuk, ezért is fogalmaztuk meg a többi részét külön állításként.

2.9.3. Állítás. ($\mathcal{L}^p_\mu(X)$ duálisa) *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér, $\mathcal{L}^p_\mu(X)$ a szokásos függvénytér efölött, $p \neq \infty$ Ekkor, ha $q = \frac{p}{p-1}$, akkor*

$$\mathcal{L}^p_\mu(X)' \equiv \mathcal{L}^q_\mu(X)$$

$$R_g : \mathcal{L}^p_\mu(X) \to \mathbb{K},\ f \mapsto \int_X gf d\mu \equiv g.$$

Bizonyítás Az integrál létezését a Hölder–egyenlőtlenség (ld. Matolcsi: Analízis V.) garantálja, a folytonosságot szintén:

$$\left|\int_X gf d\mu\right| \leq \int_X |g||f| d\mu \leq \|g\|_q \|f\|_p \,,$$

így $\|R_g\| = \|g\|_q$. Az integrál linearitásából következik, hogy $g \mapsto R_g$ lineáris, de azt meg kell mutatni, hogy injektív. Ezt megfelelő χ_E-khez tartó f_n függvénysorozatok választásával tehetjük meg. Megfelelő függvényeket választva a leképezés izometrikus volta is igazolható. Nehezebb belátni, hogy szűrjektív. ∎

Ha X véges halmaz, akkor $p = \infty$-re is igaz az állítás, azonban a $(0, 1)$ intervallumon a duális térben a Dirac–mértékeknek megfelelő funkcionálok is benne vannak, azonban ezek nem állíthatók elő $\mathcal{L}^1(0, 1)$-beli függvények segítségével.

ℓ^∞ esetében is lehet ellenpéldát adni. Legyen e_n az n-edik standard bázisvektor.

$$x_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e_k \in \ell^1.$$

Ekkor

$$L := \{a \in \ell^\infty | \exists \lim_n x_n \cdot a\}$$

lineáris eltér. Adjuk meg ezen az $f : L \to \mathbb{K},\ a \mapsto \lim_n x_n \cdot a$ funkcionált. Ez lineáris, meg kell mutatnunk, hogy folytonos is:

$$x_n \cdot a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k \leq \|a\|_\infty,$$

így

$$|f(a)| = |\lim_n x_n \cdot a| \leq \|a\|_\infty,$$

emiatt

$$\exists F \in \ell^{\infty\prime} \quad f \subset F \quad \|F\| \leq 1.$$

Tegyük fel, hogy $\exists b \in \ell^1$, hogy $F = R_b$. Ekkor $\lim_n x_n \cdot a = b \cdot a$ minden $a \in L$ esetében. De

$$\left.e_m \in L \quad \lim_n x_n \cdot e_m = 0 b \cdot e_m \quad = b_m\right\} \Rightarrow b = 0,$$

azonban $f \neq 0$, hiszen $\sum_n e_n \in \ell^\infty$ és

$$f\left(\sum_n e_n\right) = 1.$$

2.10. Feladatok

2.1. Feladat. *Tudjuk, hogy $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \supset \mathcal{L}^p(-n,n)$ (a szokásos azonosítással, hogy nullával terjesztjük ki). Ez vajon milyen halmaz $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$-ben?*

Megoldás Zárt valódi lineáris altér (közvetlenül ellenőrizhető), és mivel egy valódi lineáris altér sehol sem sűrű

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^p(-n,n) \neq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}),$$

hiszen a Baire–féle kategóriatétel értelmében (2.3.4.. állítás) teljes metrikus tér sűrű részhalmaza (például az egész) nem kapható meg megszámlálható sok sehol sem sűrű zárt halmaz uniójaként. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a p-edik hatványon integrálható függvények nem feltétlenül tűnnek el egy intervallumon kívül.

2.2. Feladat. *Konstruáljunk nem lezárható lineáris leképezést!*

Megoldás Legyen $L \subset V$ $\overline{L} \neq L$ nem zárt lineáris altér, $a \in \overline{L} \setminus L$ (nem lehet nulla, hiszen az mindkettőnek eleme). Tekintsük az $A : L + \mathbb{K}a \supsetneq L \to V$, $x + \lambda a \mapsto \lambda a$ leképezést. Ez triviálisan lineáris, L -en nulla, $\mathbb{K}a$-n az identitás. A nem lezárható, hiszen létezik olyan x_n sorozat L-ben, melynek határértéke a, hiszen $a \in \overline{L}$. Ekkor

$$\left.\begin{aligned} \lim_n (x_n, Ax_n) = (a,0) \in \overline{\operatorname{Graph} A} \\ (a,a) \in \operatorname{Graph} A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{a grafikon lezártja nem leképezés grafikonja.}$$

2.3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha $M \subset V$ zárt lineáris altér, $x_n \in M$, $z \in V \setminus M$, $\lambda_n \in \mathbb{K}$ és $\lim_n (x_n + \lambda_n z) = 0$, akkor $\lim_n \lambda_n = 0$! Adjunk példát arra, hogy ha elhagyjuk azt a feltételt, hogy M zárt, akkor nem teljesül az állítás.*

2.4. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha V és U Banach–terek, akkor $A : V \rightarrowtail U$ lineáris leképezés pontosan akkor zárt, ha $\operatorname{Dom} A$ a $\|.\|' := \|.\| + \|A.\|$ normával teljes.*

Megoldás Azt könnyen beláthatjuk, hogy ez norma, hiszen $\|A(x+y)\| = \|Ax + Ay\| \leq \|Ax\| + \|Ay\|$, és egy norma és egy félnorma összege norma.

($\Rightarrow$) Legyen x_n $\|.\|'$-vel Cauchy–sorozat. Ekkor (x_n, Ax_n) Cauchy–sorozat $V \times U$-ban. V és U teljességét így

$$\exists \lim_n (x_n, Ax_n) =: (x,y) \in \operatorname{Graph} A,$$

hiszen

$$\|x_n - x_m\| + \|Ax_n - Ax_m\| < \varepsilon,$$

és itt két pozitív szám összege szerepel, ami csak úgy tarthat nullához, ha mind a kettő nullához tart.

($\Leftarrow$) vagyünk egy $\operatorname{Graph} A \subset V \times U$ -ban futó konvergens sorozatot:

$$(x_n, Ax_n) \in \operatorname{Graph} A \quad \exists \lim_n (x_n, Ax_n) =: (x,y).$$

Ekkor n kellően nagy értékeire

$$\|x_n - x\| + \|AX_n - y\| < \epsilon \to \|x_n - x\| < \varepsilon,$$

így az x_n, illetve Ax_n sosoratok a V-beli norma szerint konvergálnak, és ebből következően Cauchy–sorozatok:

$$\|x_n - x_m\| + \|Ax_n - Ax_m\| < \varepsilon,$$

azaz $\|.\|'$ szerint is Cauchy–sorozat $\operatorname{Dom} A$ -ban, az erre teljes, így $x \in \operatorname{Dom} A$, ekkor pedig

$$\|x_n - x\| + \|Ax_n - Ax\| < \varepsilon,$$

ez pedig pont azt jelenti, hogy $y = Ax$, azaz a grafikon zárt.

2.5. Feladat. *A 2.7.5.. állítás felhasználásával (és bizonyításának mintájára) lássuk be, hogy ha U és V normált tér, $A \in \mathcal{L}in(V,U)$, akkor*

$$\|A\| = \sup_{\substack{p\in V' \;\; \|p\|=1 \\ x\in V \;\; \|x\|=1}} |(p|Ax)|$$

2.6. Feladat. *Tudjuk, hogy $C(K)$ – ahol K kompakt halmaz – duálisa a Radon–mértékek halmaza. Legyen $f_n \in C(K)$ $(n \in \mathbb{N})$ gyengén konvergens sorozat $f := (w)\lim_n f_n$. Mit jelent ez?*

Megoldás A gyenge határérték definíciója szerint ez azt jelenti, hogy

$$\lim_n \int_K f_n dm = \int_K f dm$$

minden $m : \mathcal{B}(K) \to \mathbb{K}$ Radon–mérték esetén. Ennek szeretnénk egy szügséges és elégséges feltételét találni.

Először belátjuk, hogy a pontonkénti konvergencia szükséges, hiszen ha $m := \delta_a$ Dirac–mérték szerint integrálunk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_n f_n(a) = f(a),$$

továbbá beláttuk, hogy gyengén konvergens sorozat korlátos.

Ezek a feltételek elégségesek is, hiszen ha teljesülnek, akkor a Lebesgue–tétel szerint a határérték és az integrál művelete felcserélhető.

3. fejezet

Hilbert–terek

3.1. Alapvető tulajdonságok

3.1.1. Definíció. *Egy olyan Banach–teret, melynek normája skaláris szorzatból származik,* **Hilbert–tér***nek nevezünk.*

Az eddigiek közül

$$\mathcal{L}^2_\mu(X) \ni f, g \quad \|f\|^2 = \int_X |f|^2 d\mu$$
$$\langle f, g\rangle := \int_X f^* g d\mu$$

normája származott skalárszorzatból, a skalárszorzat létezését a Hölder–egyenlőtlenség garantálja, ℓ^2 esetében hasonlóan.

Azt, hogy a norma skalárszorzatból származik, sok jó tulajdonság bizonyítására használhatjuk. Ilyen a következő állítás is:

3.1.1. Állítás. (Paralellogramma–egyenlőség) *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert–tér, és $x, y \in \mathcal{H}$. Ekkor*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Bizonyítás $\langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle$ kifejtésével, ez pont a baloldal. ■

A többi $\mathcal{L}^p$ térről ennek az állításnak a segítségével láthatjuk be, hogy nem Hilbert–terek.

3.1.2. Állítás. (norma és skalárszorzat kapcsolata) *Legyen V normált tér. Ekkor*

$$\forall x, y \in V \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \iff \exists\langle .,. \rangle \quad \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$$

3.2. Gyenge és erős konvergencia

3.2.1. Definíció. *Legyen $(V, \|.\|)$ normált tér, és $x_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat. Ekkor azt mondjuk, hogy a sorozat*
– **gyengén konvergens**, *ha $\exists x \in V$, hogy $\forall p \in V'$, $\lim_n (p|x_n) = (p|x)$. Ekkor $x = (w)\lim x_n$*
– **erősen konvergens**, *ha a megszokott módon, a normában konvergens.*

Az természetesen igaz, hogy az erős konvergenciából következik a gyenge konvergencia. Arra majd mutatunk példát, hogy fordítva általában nem igaz.

3.2.1. Állítás. *A gyenge határérték egyértelmű.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy

$$\begin{matrix} x = (w)\lim\limits_n x_n \\ y = (w)\lim\limits_n x_n \end{matrix} \quad \text{ekkor} \quad \begin{matrix} \lim\limits_n (p|x_n) = (p|x) \\ = (p|y) \end{matrix} \quad \forall p \Rightarrow x = y$$

a szétválasztási tulajdonság miatt. ■

Most mutatunk példát arra, hogy a gyenge konvergenciából az erős nem következik. ℓ^p-ben

$$\forall f \in \ell^q \quad \lim_n (f|e_n) = \lim_n f_n = 0,$$

az alapvető konvergenciakritérium szerint. Ugyanakkor

$$\nexists \lim_n e_n.$$

Ez hasonló ahhoz, mint amikor egy halmazon egy durvább és egy finomabb metrikát adunk meg, azonban ezt nem lehet metrikákkal megfogalmazni. A gyenge konvergencia egy *durvább topológiát* ad meg.

3.2.2. Állítás. *Legyen az x_n sorozat egy normált térben gyengén konvergens. Ekkor a sorozat korlátos.*

Bizonyítás A 2.7.5.. állítás szerint:

$$\|x_n\| = \sup_{\|p\|=1} |(p|x_n)|,$$

azonban a szuprémum után álló kifejezés konvergens

$$\lim_x (p|x_n) = (p|(w) \lim_n x_n),$$

így elég nagy n-re

$$|(p|x_n)| \leq \sup_{\|p\|=1} (|(p|x)| + 1) = 1 + \|x\|,$$

és ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

Vegyük észre, hogy ℓ^p-ben

$$\exists (w) \lim_n x_n \Rightarrow \forall k \quad \exists \lim_n \mathrm{pr}_k(x_n),$$

hiszen $\mathrm{pr}_k(x_n) = e_n \cdot x_n$ és $e_n \in \ell^q$. Keressünk példát arra, hogy a pontonkénti konvergenciából nem következik sem az erős, sem a gyenge konvergencia!

3.2.3. Állítás. *Legyen V normált tér, $x_n \in V$ olyan, hogy*

$$\forall p \in V' \quad \exists \xi(p) := \lim_n (p|x_n).$$

ekkor, ha $V = V''$ (azaz reflexív), akkor $\exists (w) \lim_n x_n$

Bizonyítás $\xi : V' \to \mathbb{K}$ triviálisan lineáris (a határérték tulajdonságai miatt), így azt kell belátnunk, hogy folytonos. Ez a 2.6.1.. állítás (Banach–Steinhaus-tétel) alapján teljesül. Ekkor $\xi \in V'' = V$, és készen vagyunk. ■

Érdemes megjegyezni, hogy a fenti állítást úgy módosítva, hogy p csak egy V'-ben totális részhalmazt fut be, már nem teljesül. Erre ellenpéldát is adunk:

$$x_n := \sqrt{n}\chi_{[0,1/n]} \in \mathcal{L}^2(0,1),$$

$$H := \{\chi_E | E \text{ Borel–halmaz}\} \subset \mathcal{L}^2(0,1) \equiv \mathcal{L}^2(0,1)',$$

és totális halmaz. Ekkor

$$\left|(\chi_E|\sqrt{n}\chi_{[0,1/n]})\right| = \left|\int_0^1 \sqrt{n}\chi_E\chi_{[0,1/n]}\right| \leq \sqrt{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ami, ha $n \to \infty$, akkor a nullához tart, azaz

$$\forall p \in H \quad \lim_n (p|x_n) = 0,$$

mégsem gyengén konvergens, ehhez elég egyetlen olyan elemet mutatni, amivel való kompozíciója nem konvergál, ez a $1/\sqrt{\ }$:

$$\sqrt{n}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\ }}\chi_{[0,1/n]} = \sqrt{n}\int_0^{1/n} \frac{1}{\sqrt{\ }} = \sqrt{n}\frac{\sqrt{\ }}{2}\Big|_0^{1/n} = 2$$

Hasonlóan belátható, hogy $\chi_{[n,n+1]} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ -ben gyengén tart a nullához, azonban nem konvergens sorozat.

3.3. Hilbert–terek részhalmazai, projekciótétel

3.3.1. Állítás. *Legyen $K \subset \mathcal{H}$ konvex és zárt. Ekkor $\forall x \in \mathcal{H} \quad \exists | y \in K \quad d(x,K) = d(x,y)$*

Bizonyítás Természetesen a távolság definíciójából következően

$$\exists y_n \in K \quad d := d(x,K) = \lim_n d(x,y_n) \text{ és } \frac{y_n + y_m}{2} \in K.$$

Ekkor

$$\left\| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right\| \geq d,$$

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|y_n - x + (x - y_m)\|^2 = -\|2x - (y_n + y_m)\|^2 + 2\|y_n - x\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 \leq -4d^2 + 2(\|y_n - x\|^2 + \|x - y_m\|^2),$$

aznonban ez, ha $n, m \to \infty$, akkor $-4d^2 + 2d^2 + 2d^2 = 0$-hoz tart, ebből következően az y_n sorozat Cauchy–féle. K viszont teljes metrikus tér zárt részhalmaza, így

$$\exists y := \lim_n y_n \in K \quad d(y,x) = d(K,x).$$

Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy egyetlen ilyen van. Tegyük fel, hogy van kettő, azaz $y, y' \in K \quad d = d(x,y) = d(x,y')$. Ekkor

$$\frac{y + y'}{2} \in K \quad \left\| x - \frac{y + y'}{2} \right\| \geq d \Rightarrow \|y - y'\| \leq 0,$$

a paralellogramma egyenlőség miatt, és ezzel a bizonyítást befejeztük. ∎

Speciálisan egy $M \subset \mathcal{H}$ zárt lineáris altér az konvex halmaz, így $\forall x \in \mathcal{H} \;\; \exists | x_M \in M \;\; d(x,M) = d(x, x_M)$.

3.3.2. Állítás. (Projekciótétel)

$$x - x_M \perp M \textit{ és ha } y \in M \;\; x - y \perp M \Rightarrow y = x_M.$$

Bizonyítás Legyen $z \in M$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, ekkor $x_M + \lambda z \in M$. Ekkor

$$\|x - (x_M + \lambda z)\|^2 \geq \|x - x_M\|^2,$$

(hiszen a jobboldalon a távolság áll, és $x_M + \lambda z$ altérbeli elem), a baloldal kifejtve:

$$\|x - x_M\|^2 - \langle x - x_M, \lambda z\rangle - \langle \lambda z, x - x_M\rangle + |\lambda|^2\|z\|^2 = \|x - x_M\|^2 - 2\,\mathfrak{Re}\langle x - x_M, \lambda z\rangle + |\lambda|^2\|z\|^2,$$

így

$$0 \leq -2\,\mathfrak{Re}\langle x - x_M, \lambda z\rangle + |\lambda|^2\|z\|^2 \quad \forall \lambda,$$

és ha λ valós,akkor (vagy ha komplex, akkor a valós része) kiemelhető

$$-\lambda\,\mathfrak{Re}\langle x - x_M, z\rangle$$

kis pozitív λ-ra ekkor a fenti egyenlőtlenség csak úgy teljesülhet, ha

$$\mathfrak{Re}\langle x - x_M, z\rangle = 0.$$

Ha $\mathcal{H}$ komplex, akkor teljesen hasonlóan:

$$\lambda = i\mu \quad \mu \in \mathbb{R}$$
$$\langle x - x_M, i\mu z\rangle = i\mu\langle x - x_M, z\rangle$$
$$\mathfrak{Re}\, i\mu\langle x - x_M, z\rangle = -\mu\,\mathfrak{Im}\langle x - x_M, z\rangle$$

így ezt a fentiekbe beírva kapjuk, hogy

$$\mathfrak{Im}\langle x - x_M, z\rangle = 0$$

így

$$\forall z \in M \;\; x - x_M \perp z \Rightarrow x - x_M \perp M.$$

Ezután már csak az egyértelműséget kell bebizonyítanunk. Ehhez tegyük fel, hogy

$$y \in M \quad \langle x - y, z\rangle = 0 \quad \forall z \in M.$$

Ekkor, mivel $\langle x - x_M, z\rangle = 0$,

$$\langle x - x_M + x_M - y, z\rangle = \langle x_M - y, z\rangle,$$

speciálisan, mivel $z = x_M - y \in M$

$$\|x_M - y\|^2 = 0 \Rightarrow y = x_M,$$

és ezzel a bizonyítást befejeztük. ∎

3.4. Ortokomplementerek

3.4.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert–tér, $H \subset \mathcal{H}$ egy részhalmaza. Ekkor H* **ortogonálisá***nak a*

$$H^{\perp} := \{x \in \mathcal{H} | x \perp H\}$$

halmazt nevezzük.

3.4.1. Állítás. *Az ortogonálisának a következő fontos tulajdonságai vannak*
(i) $H \subset G \Rightarrow H^{\perp} \supset G^{\perp}$
(ii) $H^{\perp}$ zárt lineáris altér

Bizonyítás (i) bizonyítása triviális. (ii): Legyen $x, y \in H^{\perp}$, ekkor a skalárszorzat linearitása miatt $x + y$ és αx is $H^{\perp}$ eleme. Hasonlóan, ha x_n konvergens sorozat $H^{\perp}$-ban, akkor a skalárszorzat folytonossága miatt a határérték is H ortogonálisának eleme. ∎

Az előbbi állítást úgy is beláthattuk volna, hogy az, ha $x \in H^{\perp}$ ekvivalens azzal, hogy $\forall y \in H$-ra $x \in \operatorname{Ker}\langle y, .\rangle$. Ezek folytonos lineáris leképezések magjai, így zárt lineáris alterek. Ekkor

$$H^{\perp} = \bigcap_{y \in H} \operatorname{Ker}\langle y, .\rangle$$

zárt alterek metszete, így zárt lineáris altér.

A következő állítások célja, hogy a végén belássuk, hogy $H^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Span} H}$. Ehhez több állításon keresztül fogunk eljutni. A $\subset$ irányú tartalmazást a fenti állítás és a skalárszorzal tulajdonságai segítségével könnyen beláthatjuk.

3.4.2. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert–tér. Ekkor, ha $M \subset \mathcal{H}$ zárt lineáris altér, akkor $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$, azaz M és M ortogonálisa kiegészítő alterek.*

Bizonyítás Legyen $x \in M \cap M^{\perp}$. ekkor $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$. Ezzel beláttuk, hogy a metszetükben tényleg csak a nullavektor van. Most belátjuk, hogy minden elem felbontható:

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad x = x_M + (x - x_M),$$

és a projekciótétel (3.3.2.. állítás) szerint $(x - x_M) \in M^{\perp}$, így a bizonyítás véget ért. ∎

Ebből már következik, hogy ha M zárt lineáris altér, akkor $M^{\perp\perp} = M$, hiszen ekkor M és $M^{\perp}$, illetve $M^{\perp}$ és $M^{\perp\perp}$ is ortogonális kiegészítő alterek. Ennek felhasználásával triviális a következő állítás:

3.4.3. Állítás. *$H^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Span} H}$.*

Következmény H pontosan akkor totális $\mathcal{H}$-ban (azaz $\overline{\operatorname{Span} H} = \mathcal{H}$, ami azzal ekvivalens, hogy $H^{\perp\perp} = \mathcal{H}$), ha $H^{\perp} = \mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$.

3.5. Projektorok

3.5.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert–tér, $M \subset \mathcal{H}$ zárt lineáris altér. Ekkor a*

$$P_M : \mathcal{H} \to M, \quad x \mapsto x_M$$

leképezést az $M^{\perp}$ **mentén M-re való vetítés** *operátorának nevezzük.*

Tudjuk, hogy ez lineáris leképezés, $P_M^2 = P_M$ továbbá $\operatorname{Ran} P_M = M$, $\operatorname{Ker} P_M = M^{\perp}$.

3.5.1. Állítás. *P_M folytonos, és ha $M \neq \{0\}$, akkor $\|P_M\| = 1$.*

Bizonyítás Tudjuk, hogy $\mathcal{H}$ minden eleme felbontható $x = x_M + (x - x_M)$ alakban. Mivel $x_M \in M$, $x_M = P_M x_M$, emiatt

$$\|x\|^2 = \|P_M x\|^2 + \|x - x_M\|^2 \text{ így } \|P_M x\| \leq \|x\|,$$

tehát P_M valóban folytonos, és $\|P_M\| \leq 1$. Már csak azt kell belátnunk, hogy ezt fel is veszi. Ha $M \neq \{0\}$, akkor

$$x \in M \quad P_M x = x \quad \|P_M x\| = \|x\|,$$

és ezzel a bizonyítást befejeztük. ∎

3.5.2. Definíció. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert–tér. Egy $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ projektort* **ortogonális***nak nevezünk, ha folytonos, és $Ker\, P \perp Ran\, P$, azaz $Ker\, P = (Ran\, P)^\perp$*

Az előbbiekben szereplő P_M projektor ilyen volt. Egy $\operatorname{Ran} P$-ben futó sorozat és P folytonossága segítségével könnyen beláthatjuk, hogy egy ortogonális projektor értékkészlete zárt lineáris altér, melynek ortokomplementere a projektor magja. Ilymódon az ortogonális projektorok és a zárt lineáris alterek között bijekció létesíthető.

Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert–tér, $i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}', \quad x \mapsto \langle x, .\rangle =: i_x =: \langle x|$. Ez izometrikus injekció, hiszen

$$\|\langle x, .\rangle\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y\rangle|.$$

A Hilbert–terek egy nagyon fontos tulajdonságát mondja ki a következő állítás.

3.5.2. Állítás. (Riesz–féle reprezentációs tétel) *A fenti leképezés szűrjekció, azaz ha $f \in \mathcal{H}'$, akkor $\exists x \in \mathcal{H}$, hogy $f = \langle x, .\rangle$.*

Bizonyítás Ha $f = 0$, akkor $x := 0$ a fentieknek megfelelő elem. Ha $f \neq 0$ akkor, mivel f folytonos lineáris leképezés és zárt halmazon értelmezett, a magja $\operatorname{Ker} f \subsetneq \mathcal{H}$, így $\exists z \neq 0 \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$. Ekkor

$$\forall y \in \mathcal{H} \quad f(z)y - f(y)z \in \operatorname{Ker} f \quad \text{azaz} \quad f(z)\langle z, y\rangle - f(y)\|z\| = 0,$$

ezt egy kicsit átrendezve

$$f(y) = \frac{f(z)}{\|z\|}\langle z, y\rangle,$$

tehát az állítás teljesüléséhez megfelel az

$$x := \frac{f^*(z)z}{\|z\|}$$

Hilbert–térbeli elem. ■

3.6. Ortonormált rendszerek

3.6.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert–tér. Ekkor a $\{e_i | i \in I\}$ halmazt* **ortonormált rendszer***nek nevezzük, ha*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} \quad (i, j \in I)$$

3.6.1. Állítás. *Egy ortonormált rendszer topologikusan lineárisan független.*

Bizonyítás Legyen $i \in I$. Ekkor a skalárszorzat folytonossága miatt tudjuk, hogy

$$e_i \in \{e_j | j \in I \setminus \{i\}\}^\perp.$$

Tegyük fel, hogy

$$e_i \in \overline{\operatorname{Span}\{e_j | j \in I \setminus \{i\}\}} = \{e_j | j \in I \setminus \{i\}\}^{\perp\perp},$$

azonban így e_i egy zárt lineáris altérnek és a komplementerének is eleme volna, ez viszont csak a nulla lehet, a feltevésünkből ellentmondásra jutottunk. ■

3.6.2. Definíció. *Legyen $\{e_i | i \in I\}$ ortonormált rendszer. Azt mondjuk, hogy ez* **teljes***, ha $\{e_i | i \in I\}^\perp = \{0\}$.*

Ebből, és az előző állításból következik, hogy egy teljes ortonormált rendszer Schauder–bázis, ezért használjuk az **ortonormált bázis** elnevezést is.

3.6.2. Állítás. (Bessel–egyenlőtlenség) *Legyen $\{e_i | i \in I\}$ ortonormált rendszer a $\mathcal{H}$ Hilbert–térben. Ekkor*

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad \exists \sum_{i \in I} |\langle e_i, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

és

$$\exists \sum_{i \in I} \langle e_i, x\rangle e_i = P_M x,$$

ahol $M = \overline{Span\{e_i | i \in I\}}$.

Bizonyítás Legyen $F \subset I$ véges részhalmaz. Ekkor

$$\left\| x - \sum_{i \in F} \langle e_i, x \rangle e_i \right\| \geq 0,$$

és a fenti norma négyzete kifejthető a következő alakban:

$$\|x\|^2 - \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, x \rangle - \sum_{i \in F} \langle e_i, x \rangle^* \langle e_i, x \rangle + \sum_{i \in F} |\langle e_i, x \rangle|^2,$$

ahol a harmadik tag is $\sum |\langle e_i, x \rangle|^2$ alakba írható, ezt átrendezve kapjuk hogy

$$\forall F \subset I \text{ véges } \quad \sum_{i \in F} |\langle e_i, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

azaz tényleg konvergens az állításban szereplő összeg, és teljesül a Bessel–egyenlőtlenség.

A másik rész bizonyítása: legyen $F \subset I$ ismét véges. Ekkor a

$$\|P_M x - \sum_{i \in F} \langle e_i, x \rangle e_i \|^2$$

kifejezésre kell becslést adnunk.

$$x = P_M x + (x - P_M x)$$

Megmutatjuk, hogy $\exists \sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle e_i$, mert a részletösszegek sorozata Cauchy–féle, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F_\varepsilon \text{ véges } \quad \forall K \text{ véges } K \cap F_\varepsilon = \emptyset \ : \ \| \sum_{i \in K} \langle e_i, x \rangle e_i \|^2 < \varepsilon^2,$$

hiszen a baloldali kifejezés $\sum_{i \in K} |\langle e_i, x \rangle|^2$ alakba írható, így az állítás első fele miatt a sor Cauchy–féle, ami a Hilbert–tér teljessége miatt a konvergenciát maga után vonja.

Ezután legyen $x \in \mathcal{H}$. Szorozzuk be az $x - \sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle e_i$ kifejezést e_j-vel:

$$\left\langle e_j, x - \sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle e_i \right\rangle = 0 (\forall j),$$

azaz

$$x - \sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle e_i \perp M,$$

és a baloldali kifejezésben szereplő összeg M része, így készen vagyunk: $\exists | x_M \in M \ x - x_M \perp M$, és ez éppen az. ∎

3.6.3. Állítás. *Legyen $\{x_i | i \in I\}$ ortonormált rendszer a $\mathcal{H}$ Hilbert–térben. Ekkor a következők egyenértékűek:*
(i) az ortonormált rendszer teljes
(ii) $\forall x \in \mathcal{H}$ esetén $x = \sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle e_i$
(iii) $\forall x \in \mathcal{H}$ esetén $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle e_i, x \rangle|^2$ (Parseval–egyenlőség)
(iv) $\forall x, y \in \mathcal{H}$ esetén $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, x \rangle$

Bizonyítás (iv) $\Rightarrow$ (iii) $y := x$

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv) $P_M = \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$

(iii) $\Rightarrow$ (i) tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz az ortonormált rendszer nem teljes. Ez azt jelenti, hogy $\exists x \neq 0$, amelyre $\langle e_i, x \rangle = 0 \ \forall i$. Ekkor ellentmondást kapunk, hiszen így (iii)-ban csupa nullát adnánk össze. ∎

3.6.4. Állítás. *Legyen $(e_i | i \in I)$ a $\ell^2(I)$ tér bázisa, és $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(i \in I)$. Ekkor*

$$\exists \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \iff \exists \sum_{i \in I} |\lambda_i|^2.$$

Bizonyítás ($\Leftarrow$) Írjuk fel a jobboldalon szereplő összeg ℓ^2-beli konvergenciájának feltételét (a Cauchy–kritériumot):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists F_\varepsilon \text{ véges } \forall F \text{ véges } F \cap F_\varepsilon = \emptyset$$

esetén a baloldali összeg normája legyen ε-nál kisebb. F véges esetén az is igaz, hogy

$$\left\| \sum_{i \in F} \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i \in F} |\lambda_i|^2,$$

ami pont a fenti jobb oldali összeg egy részletösszege, az arra vonatkozó Cauchy–kritérium miatt ez kicsi.

A másik irányú következtetés teljesen hasonló módon látható be. ■

Ehhez teljesen hasonló módon bizonyítható a következő állítás is, hiszen nem használtuk ki $\ell^2(I)$ semmilyen speciális tulajdonságát:

3.6.5. Állítás. *Legyen $\{e_i | i \in I\}$ ortonormált rendszer a $\mathcal{H}$ Hilbert–térben, és $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(i \in I)$. Ekkor*

$$\exists \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \iff \exists \sum_{i \in I} |\lambda_i|^2 \iff (\lambda_i | i \in I) \in \ell^2(I).$$

3.6.6. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert–tér. Ekkor létezik $\mathcal{H}$-ban teljes ortonormált rendszer.*

Bizonyítás Vegyük $\mathcal{H}$ ortonormált rendszereinek halmazát:

$$\mathcal{F} := \{\mathcal{H} \text{ ortonormált rendszerei}\},$$

ekkor ezen a halmazelméleti tartalmazás rendezés. Legyen $\mathcal{L}$ lánc $\mathcal{F}$ -ben. Ekkor $\cup\mathcal{L} \in \mathcal{F}$, hiszen minden eleme egységnyi hosszú (valamelyikben benne van), és két eleme pedig szükségképpen ortogonális egymásra (a láncszerűség miatt van olyan ONR, aminek mindkettő eleme). Ekkor, mivel ilymódon minden lánc felülről korlátos, a Zorn–lemma miatt létezik maximális elem.

Ez a maximális elem teljes ortonormált rendszer, hiszen ha nem lenne az, lenne a zárt lineáris burkára ortogonális vektor, ezt a normájával leosztva egységvektort kapunk, amelyet az ortonormált rendszerhez hozzávehetnénk, és ez a maximalitásnak ellentmond. ■

3.6.7. Állítás. *Legyen $\mathcal{O} \subset \mathcal{H}$ ortonormált rendszer. Ekkor létezik $\hat{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O}$ teljes ortonormált rendszer, azaz bármely ortonormált rendszer kiegészíthető teljessé.*

Bizonyítás Az előző állítás bizonyításával analóg módon, csak most az

$$\mathcal{F} := \{\mathcal{O}\text{-t tartalmazó ortonormált rendszerek } \mathcal{H}\text{-ban}\}$$

halmaz láncait kell tekinteni. ■

3.6.8. Állítás. *Legyenek $(e_i | i \in I)$ és $(d_j | j \in J)$ teljes ortonormált rendszerek valamely $\mathcal{H}$ Hilbert–térben. Ekkor I és J számossága azonos.*

Bizonyítás Ha valamelyik véges, akkor ismert a bázisok számosságára vonatkozó tétel a lineáris algebrából, elég azt az esetet vizsgálnunk, amikor mindkét indexhalmaz számossága végtelen. Legyen ekkor minden $i \in I$ esetén

$$A_i := \{j \in J | \langle e_i, d_j \rangle \neq 0\}.$$

Minden A_i halmazról tudjuk, hogy legfeljebb megszámlálható (lásd az 1.3.1.. állítást), így mivel

$$J = \bigcup_{i \in I} A_i$$

($j \in J$ $\forall i \in I$ $\langle e_i, d_j \rangle = 0 \Rightarrow d_j = 0$, ami nem lehet), így J számossága kissebb vagy egyenlő, mint $I \times \mathbb{N}$ számossága, ami végtelen halmazok esetén megegyezik I számosságával.

Ugyanezt elmondhatjuk I és J szerepének felcserélésével is, így I számossága is kisebb vagy egyenlő, mint J számossága. Ekkor a Schröder–Bernstein-tétel szerint (ld. Matolcsi: Analízis I.) a kettő számossága megegyezik. ■

3.6.3. Definíció. *Egy Hilbert–tér tetszőleges teljes ortonormált rendszerének a számosságát a tér* **Hilbert–dimenzió***jának nevezzük.*

A definíciót megelőző állítás biztosítja, hogy a definíció jó legyen, azaz egy Hilbert–tér Hilbert–dimenziója egyértelmű legyen.

3.6.9. Állítás. *Egy Hilbert–tér pontosan akkor szeparábilis, ha Hilbert–dimenziója legfeljebb megszámlálható.*

Bizonyítás ($\Rightarrow$) indirekt módon. Legyen $(e_i|i \in I)$ teljes ortonormált rendszer $\mathcal{H}$-ban, és I számossága nagyobb, mint megszámlálható. Vegyük a $G_r(e_i)$ gömböket, úgy hogy

$$\emptyset = G_r(e_i) \cap G_r(e_j) \quad i \neq j.$$

Ekkor ezek a gömbök több, mint megszámlálható sokan vannak. Tegyük fel, hogy $A \subset \mathcal{H}$ megszámlálható sűrű részhalmaz, azaz $\overline{A} = \mathcal{H}$. Ebből következően $A \cap G_r(e_j) \neq \emptyset\ \forall j$, hiszen ezek diszjunkt nyílt halmazok, ekkor viszont A nem lehet megszámlálható, így ellentmondásra jutottunk.

($\Leftarrow$) Ha a tér véges dimenziós, akkor tudjuk, hogy szeparábilis (ld. Gruber: Analízis III.), így elég a megszámlálhatóan végtelen dimenziós esetet vizsgálnunk. Legyen $(e_n|n \in \mathbb{N})$ teljes ortonormált rendszer. Ekkor a

$$\left\{ \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \,\middle|\, N \in \mathbb{N}, \alpha_n \in \mathbb{Q} \right\} \text{ ill. } \left\{ \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \,\middle|\, N \in \mathbb{N}, \alpha_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \right\}$$

halmaz megszámlálható (e_n-ek véges, racionális együtthatójú lineárkombinációi), és sűrű is, hiszen minden $x \in \mathcal{H}$ megközelíthető elemeivel:

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n,$$

így $\forall \varepsilon > 0$ -ra $\exists N$, hogy

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, x \rangle e_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

és szintén $\exists \alpha_n \in \mathbb{Q}$ ill. $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ $(n = 1 \ldots N)$, hogy

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle e_n, x \rangle - \alpha_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

így a teljes eltérés is kisebb lesz ε-nál. ■

Megjegyzés Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ha $(x_i|i \in I)$ topologikusan lineárisan független rendszer valamely V Banach–térben, akkor

$$\sum_{i \in I} \alpha_i x_i \in \overline{\mathrm{Span}\{x_i|i \in I\}},$$

azonban a halmaz zárt lineáris burkában nem csak ilyen alakú függvények vannak (például a $C(\mathbb{K})$ térben nem minden elem írható hatványsor alakjába, pedig a polinomok sűrű halmazt alkotnak), viszont Hilbert–térben már minden elem ilyen alakú.

3.7. Izomorf Hilbert–terek

Ahhoz, hogy bizonyos tételeket könnyen általánosíthassunk egyik Hilbert–térről a másikra, szükségünk van annak a pontos definiálására, hogy mikor tekintünk két Hilbert–teret egyformának.

3.7.1. Definíció. *Két ($\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$) Hilbert–teret* **izomorf***nak mondunk, ha van közöttük skalárszorzattartó lineáris bijekció, azaz ha $\exists A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, hogy*

$$\langle Ax, Ay \rangle_{\mathcal{K}} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}$$

Megjegyzés Az triviálisan következik, hogy ekkor A normatartó is. Belátható, hogy ez a következtetés fordítva is igaz, azaz ha A normatartó, akkor megtartja a skalárszorzatot is.

Tudjuk, hogy két véges dimenziós vektortér izomorfiájának szükséges és elégséges feltétele, hogy a dimenziószámuk megegyezzen. Ennek az általánosítása a következő állítás.

3.7.1. Állítás. *$\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert–terek Hilbert–dimenziója pontosan akkor egyezik meg, ha izomorfak, azaz $\exists A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ $\forall x, y \in \mathcal{H}$ $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$.*

Bizonyítás ($\Rightarrow$) Legyen $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ egy-egy ortonormált rendszere $(e_i | i \in I)$ és $(d_i | i \in I)$. Ekkor a

$$\mathcal{H} \to \mathcal{K} \quad \sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle e_i \mapsto \sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle d_i$$

lineáris izometrikus bijekció.

($\Leftarrow$) Legyen $(e_i | i \in I)$ teljes ortonormált rendszer, A pedig az állítás feltételeinek megfelelő lineáris bijekció. Ekkor az $(Ae_i | i \in I)$ ortonormált rendszerről szeretnénk megmutatni, hogy teljes $\mathcal{K}$-ban. Ehhez tegyük fel, hogy nem teljes, azaz $\exists x \in \mathcal{K}$, hogy $\langle Ae_i, x \rangle = 0$ $\forall i$. Mivel A izometrikus lineáris bijekció, az inverze is ilyen, így

$$\langle A^{-1} A e_i, A^{-1} x \rangle = \langle A e_i, x \rangle = 0,$$

ebből következően $A^{-1}x = 0 \Rightarrow x = 0$, és ezzel a bizonyítást befejeztük. ∎

Következmény Az állítás egy igen hasznos következménye, hogy ha $(e_i | i \in I)$ teljes ortonormált rendszer a $\mathcal{H}$ Hilbert–térben, akkor $\mathcal{H}$ izomorf $\ell^2(I)$-vel, a

$$\sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle e_i \mapsto (\langle e_i, x \rangle | i \in I)$$

bijekcióval.

3.8. Teljes ortonormált rendszerek speciális Hilbert–terekben

$\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$. A most következő állításokat kimondhatnánk az $\mathcal{L}^2(a, b)$ terekre is, és ugyanígy bizonyíthatnánk, azonban így a formulák jóval egyszerűbbek lesznek. Megadunk egy izometrikus bijekciót: $A : \mathcal{L}^2(a, b) \to \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$

$$(A\varphi)(x) := \sqrt{\frac{2\pi}{b-a}} \varphi \left(\frac{x+\pi}{2\pi}(b-a) + a \right).$$

Ez izometrikus, hiszen

$$\|A\varphi\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |(A\varphi)(x)|^2 dx = \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt.$$

3.8.1. Állítás. $\left\{ \frac{1}{2\pi} \exp^{in} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$ *teljes ortonormált rendszer $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$-ben.*

Bizonyítás Az ortonormáltság egyszerű integrálással belátható, ebből következik a topologikus lineáris függetlenség is, már csak a teljességet kell belátnunk. Legyen $f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ folytonos, és $\langle f, \exp^{in} \rangle = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. Ekkor, ha $f \neq 0$, akkor $\exists y \in]-\pi, \pi[=: I$-ben hogy $f(y) \neq 0$. Nézzük azt az esetet, ha $\mathfrak{Re}\, f(y) > 0$ (a többi eset is hasonlóan tárgyalható). f folytonossága miatt

$$\exists \delta > 0 \;\; \mathfrak{Re}\, f(x) > 0 \;\; \forall x \in]y - \delta, y + \delta[=: J.$$

Legyen $T(x) := 1 - \cos\delta + \cos(x - y)$ $(x \in I)$:

$$\begin{array}{lll} x \in J & |x-y| \leq \delta & T(x) \geq 1 \\ x \in I \setminus J & |x-y| > \delta & T(x) < 1, \end{array}$$

és T felírható exponenciális függvények lineárkombinációjaként, ebből következően T^n is, így feltételezésünk szerint $\langle T^n, f \rangle = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de

$$0 = \int_I T^n \, \mathfrak{Re}\, f = \int_{I \setminus J} T^n \, \mathfrak{Re}\, f + \int_J T^n \, \mathfrak{Re}\, f > \int_J \mathfrak{Re}\, f > 0,$$

hiszen az $I \setminus J$-re vett integrál 0-hoz tart Lebesgue tétele értelmében (van integrálható majoráns), és J-n $\mathfrak{Re}\, f > 0$, így ellentmondásra jutottunk, f csak a nulla lehet.

Ezután legyen $f \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi) \subset \mathcal{L}^1(-\pi,\pi)$ nem feltétlenül folytonos függvény. Legyen

$$F := \int_{-\pi} f$$

f-nek az integrálfüggvénye. Ez egy abszolút folytonos függvény.

$$\left\langle \exp^{in}, F \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} F(x) dx$$

Mivel F abszolút folytonos függvény, lehet parciálisan integrálni (ld. Matolcsi: Analízis V.):

$$\left\langle \exp^{in}, F \right\rangle = \frac{e^{-inx}}{-in} F(x) \Big|_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} f(x) dx,$$

azonban feltételezésünk szerint $\left\langle \exp^{in}, f \right\rangle = 0$, így mivel a kiintegrált rész 0, ez a folytonos függvény minden exponenciálisra ortogonális, kivéve az $n = 0$ esetet. Tekintsük a

$$G := F - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F = F - \frac{1}{2\pi} \langle 1, F \rangle$$

függvényt. Ez is abszolút folytonos, és $\left\langle \exp^{in}, G \right\rangle = 0$ $(n \neq 0)$, és

$$n = 0: \ \langle 1, G \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \left(F - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F \right) = 0,$$

így a bizonyítás első feléből tudjuk, hogy $G = 0$. Ebből következik, hogy

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F \quad F(-\pi) = 0 \Rightarrow F = 0,$$

így mivel $F = \int_{-\pi} f \Rightarrow f = 0$, hiszen ha $\int_E f = 0$ $\forall E$ Lebesgue–mérhető, akkor $f = 0$ m.m., ezzel bebizonyítottuk, hogy az exponenciálisok ortogonálisában csak a 0 függvény van, hiszen ez minden részintervallumra teljesül, és az $f\lambda$ mérték az intervallumok gyűrűjéről egyértelműen terjeszthető ki. Ez a mérték az intervallumok gyűrűjén nulla véges vektormérték, így minden Lebesgue–mérhető halmazon nulla. ■

Ezt a teljes ortonormált rendszert hívjuk **Fourier–rendszer**nek.

3.8.2. Állítás. (Gram–Schmidt-ortogonalizáció) *Legyen $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}$ lineárisan független rendszer. Ekkor létezik egy $\{e_n | n \in \mathbb{N}\}$ ortonormált rendszer úgy, hogy*

$$\forall n : Span\{a_1, \ldots, a_n\} = Span\{e_1, \ldots, e_n\}.$$

Bizonyítás Legyen

$$e_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|}, \ b_{n+1} := a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle e_n, a_{n+1} \rangle e_k \text{ és } e_{n+1} := \frac{b_{n+1}}{\|b_{n+1}\|}.$$

Ekkor, mivel a levont tag éppen $P_{\mathrm{Span}\{e_1,\ldots,e_n\}}$, ezek valóban egymásra merőleges egységvektorok, és nem lesz nulla a nevezőben, mert az magával vonná, hogy az a_k-k nem lineárisan függetlenek. ■

Ortogonális polinomrendszerek. Gyakran alkalmazunk különböző intervallumokon az identitáshatványokból Gram–Schmidt-ortogonalizációval nyert teljes ortonormált rendszereket.

3.8.1. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum. Egy $\varrho : I \to \mathbb{R}_0^+$ függvény* **súlyfüggvény**, *ha*

(i) folytonos

(ii) Lebesgue–integrálható

(iii) ha $\sup I = \infty$ akkor $\lim_{x\to\infty} x^n \varrho(x) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, illetve ha $\inf I = -\infty$, akkor $\lim_{x\to-\infty} x^n \varrho(x) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Ezután tekintsük a $\mathcal{L}^2_{\varrho\lambda}(I)$ Hilbert–teret, azaz az I intervallumon a ϱ súlyfüggvény mellett (a $\varrho\lambda$ mérték szerint) négyzetesen integrálható függvények terét.

A súlyfüggvény definíciójából adódóan

$$\{\mathrm{id}^n | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}^2_{\varrho\lambda}(I),$$

hiszen (iii) miatt

$$\int_1^\infty x^n \varrho(x) dx = \int_1^\infty x^{n+2} \frac{\varrho(x)}{x^2},$$

és a számláló korlátos, a nevező pedig integrálható.

Ekkor az identitáshatványok Gram–Schmidt-ortogonalizáltját

$$\{P_{n,\varrho} | n \in \mathbb{N}_0\}\text{-t},$$

hívják **polinomrendszer**nek. (A gyakorlatban gyakran nem 1-re normált polinomrendszereket használunk, hanem pl. a főegyütthatót választjuk 1-nek, azonban elméleti megfontolásokhoz így kényelmesebb.)

Ekkor tudjuk, hogy ez egy teljes ortonormált rendszer, hiszen a Weierstrass–féle approximációs tétel szerint sűrű (a végtelen norma finomabb, mint a kettes norma, és az ortogonalitás miatt topologikusan lineárisan független.)

Felsorolunk néhány polinomrendszert:

$I =]-1,1]$	$\varrho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	Jacobi–polinomok
	$\alpha = \beta = 0$	Legendre–polinomok
	$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$	elsőfajú Csebisev–polinomok
$I =]0,\infty[$	$\varrho(x) = e^{-x}$	Laguerre-polinomok
$I = \mathbb{R}$	$\varrho(x) = e^{-x^2/2}$	Hermite-polinomok

A Legendre–, Laguerre– és Hermite–polinomokat a kvantummechanikában is alkalmazzák, az impulzusmomentum, a hidrogénatom és a harmonikus oszcillátor tárgyalásakor.

Fontos tudnunk, hogy ha $P \in \mathcal{L}^2_{\varrho\lambda}(I)$ teljes ortonormált rendszert alkotnak, akkor $\sqrt{\varrho}P \in \mathcal{L}^2(I)$ is.

Tudjuk, hogy ezek az $\mathcal{L}^2_{\lambda\varrho}(I)$ függvényterek szeparábilisek, hiszen megszámlálható Hilbert–dimenziójúak.

Szintén fontos tudni, hogy ezeket a polinomokat differenciálegyenletek határozzák meg, melyeknek egyetlen polinom megoldásuk van:

$$P_n'' - 2\mathrm{id}_\mathbb{R} P_n' + 2nP_n = 0$$

$$x'' - 2\mathrm{id}_\mathbb{R} x' + 2nx = 0,$$

és ezek a differenciálegyenletek kerülnek elő a kvantummechanikában.

3.8.3. Állítás. *Legyen $(\eta_n | n \in \mathbb{N})$ teljes ortonormált rendszer az $\mathcal{L}^2_\mu(X)$ térben, és $\Theta \in \mathcal{L}^\infty_\mu(X)$ olyan függvény, hogy μ-essinf $|\Theta| > 0$. Ekkor $(\Theta\eta_n | n \in \mathbb{N})$ is teljes rendszer, és ha $|\Theta| = 1$ m.m., akkor ortonormált is.*

Bizonyítás ha $|\Theta| = 1$, akkor a bizonyítás egyszerű:

$$\langle \Theta\eta_n, \Theta\eta_m \rangle = \int_X \Theta_* \eta_n^* \Theta \eta_m d\mu = \int_X \Theta^* \Theta \eta_n^* \eta_m d\mu = \int_X \eta_n^* \eta_m = \delta_{nm}$$

így ha valamely φ függvényre $\langle \Theta\eta_n, \varphi \rangle = 0 \ \forall n$, akkor

$$0 = \langle \Theta\eta_n, \varphi \rangle = \langle \eta_n, \Theta^* \varphi \rangle \ (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ TONR} \Rightarrow \Theta^*\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0.$$

Abban az esetben, ha $|\Theta| \neq 1$ a lineáris függetlenség igazolása triviális, hiszen a

$$\sum_{n \in \text{véges}} \alpha_n \Theta \eta_n = 0$$

egyenletben, mivel $|\Theta| > 0$ m.m., Θ-val egyszerűsíthetünk. A topologikus lineáris függetlenség belátása már valamivel bonyolultabb. Tegyük fel, hogy $\exists m \ \Theta\eta_m \in \overline{\mathrm{Span}\{\Theta\eta_n | n \neq m\}}$. Ekkor a még nem lezárt halmaz elemei

$$\sum_{n \in \text{véges}} \alpha_n \Theta \eta_n = \Theta \sum_{n \in \text{véges}} \alpha_n \eta_n =: \Theta \varphi_N$$

alakúak, és a feltételezésünk azzal ekvivalens, hogy

$$\Theta\eta_m = \lim_{N\to\infty} \Theta\varphi_N,$$

azaz

$$\lim_N \int_X |\Theta\eta_m - \Theta\varphi_N|^2 \, d\mu = 0.$$

Ugyanakkor az integrandus nagyobb vagy egyenlő $|\Theta|^2|\eta_m - \varphi_N|^2$-tel, így az egész integrált csökkentjük, ha kiemelünk belőle μ-ess inf $|\Theta|$-t, így

$$\lim_{N\to\infty} \int_X |\eta_m - \varphi_N|^2 d\mu = 0,$$

és ebből már következik az állítás. ∎

A Hilbert–terekben alkalmazott módszerek hatékonyságának illusztrálására beláthatjuk a következő állítást:

3.8.4. Állítás. *Legyen $\{P_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ teljes ortonormált polinomrendszer $\mathcal{L}^2(0,1)$-ben. Ekkor $\{P_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ Schauder–bázis $C(0,1)$-ben.*

Azt már a Weierstrass–féle approximációs tétel (2.1.1.. állítás) alapján tudjuk, hogy sűrű halmazt alkotnak, csak a topologikus lineáris függetlenségüket kell belátnunk. azt tudjuk, hogy $C(0,1)$ duálisa a $(0,1)$ intervallum Radon–mértékeinek terével azonosítható. Ekkor a P_n ortonormált polinomrendszer beinjektálható a duálisba a $P_n \mapsto P_n\lambda$ injekcióval (a Radon–Nikodym tétel miatt ez injektív), majd indirekt módon belátható a topologikus lineáris függetlenség: tegyük fel, hogy

$$P_m \in \overline{\mathrm{Span}\{P_n | n \neq m\}}.$$

ugyanakkor, mivel most a duális elemek hatása éppen az $\mathcal{L}^2$-beli skalárszorzatot adja, tudjuk, hogy $(P_n\lambda | P_m) = \delta_{nm}$, így a fenti lineáris burok elemein a $P_n\lambda$ mérték a nulla értéket veszi fel. Mivel a duális beli elemek az egész téren értelmezett folytonos lineáris leképezések, így a lezárton is a nulla értéket kell felvennie, ugyanakkor a P_n polinomon az 1-et, így ellentmondásra jutottunk a feltételezésünkkel. Ezzel a tételt beláttuk. ∎

Látható, hogy nem használtunk fel semmi olyan ismeretet, amivel a Banach–terek tárgyalásakor még nem rendelkeztünk, csak a Hilbert–terek struktúrájában gondolkozva jobban átlátható a szükséges gondolatmenet.

3.9. Hilbert–terek tenzorszorzata

Legyen $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert–tér. Ekkor tenzorszorzatuk, $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ a $\langle x_1\otimes y_1, x_2\otimes y_2\rangle := \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle$ skalárszorzattal skalárszorzatos tér $\mathbb{K}$ felett. Ez a skalárszorzat kiterjeszthető az egész tenzorszorzatra.

Ezzel a tenzorszorzat–térrel csak egy baj van: nem lesz teljes, ezért ennek a teljessé tételével $\overline{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}}$ kell foglalkoznunk (a felülvonást a későbbiekben elhagyjuk), így ez is Hilbert–tér lesz (ezt a két Hilbert–tér **Hilbert–tenzorszorzatá**nak nevezzük).

3.9.1. Állítás. *Ha $\{e_i | i \in I\}$ és $\{d_j, j \in J\}$ teljes ortonormált rendszer $\mathcal{H}$-ban és $\mathcal{K}$-ban, akkor $\{e_i \otimes d_j | i \in I, j \in J\}$ teljes ortonormált rendszer a két tér Hilbert–tenzorszorzatában.*

Bizonyítás $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ elemei

$$\sum_{i\in I} \alpha_i e_i \otimes \sum_{j\in J} \beta_j d_j$$

alakba írhatók. Azt kéne belátni, hogy az összegzések átrendezésével

$$\sum_{i\in I} \alpha_i e_i \otimes \sum_{j\in J} \beta_j d_j = \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j (e_i \otimes d_j).$$

Ez véges lineárkombinációkra nyilvánvalóan igaz. Azt is tudjuk, hogy

$$\|x\otimes y\| = \|x\|\|y\|,$$

így

$$\mathcal{H}\times\mathcal{K} \to \mathcal{H}\otimes\mathcal{K} \ , \ (x,y) \mapsto x\otimes y$$

folytonos bilineáris leképezés, így a fenti összegezések sorrendje valóban felcserélhető. ∎

Egy speciális, az alkalmazásokban gyakori eset a következő:

3.9.2. Állítás. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-véges mértéktér. Ekkor $\mathcal{L}^2_\mu(X) \otimes \mathcal{L}^2_\nu(Y) \equiv \mathcal{L}^2_{\mu\otimes\nu}(X \times Y)$.*

Bizonyítás A Fubini–tétel segítségével. Legyen $f \in \mathcal{L}^2_\mu(X)$ és $g \in \mathcal{L}^2_\nu(Y)$. Ekkor a $\subset$ irányú tartalmazás nyilvánvaló, a másikat kell belátnunk. Az $\mathcal{L}^2_{\mu\otimes\nu}(X \times Y)$ térben a $\mu \times \nu$ „tégla–lépcsősfüggvények" totális rendszert alkotnak. Ezek közül elég a karakterisztikus függvényeket vizsgálni, hiszen a lépcsősfüggvények ezeknek lineárkombinációi, azok pedig triviálisan mindkét halmaz elemei. ■

Szintén a kvantummechanikában fontos a következő eset (a spin tárgyalásánál).

3.9.3. Állítás. *Legyen $\mathcal{K}$ Hilbert–tér. Ekkor $\mathcal{L}^2_\mu(X) \otimes \mathcal{K} \equiv \mathcal{L}^2_\mu(X; \mathcal{K})$ a $\varphi \otimes k \equiv (x \mapsto \varphi k)$*

Bizonyítás A bijekciót csak tenzorszorzat alakú elemeken adtuk meg. Lineáris kombinációkra triviálisan kiterjeszthető, ezek sűrű lineáris alteret alkotnak.

$$\|(x \mapsto \varphi(x)k)\|^2 = \int_X \|\varphi(x)k\|^2_{\mathcal{K}} d\mu(x) = \int_X \|\varphi(x)\|^2_{\mathcal{L}^2} \|k\|^2_{\mathcal{K}} d\mu(x) = \|\varphi\|^2_{\mathcal{L}^2} \|k\|^2_{\mathcal{K}},$$

és mivel $\|\varphi \otimes k\|^2 = \|\varphi\|^2_{\mathcal{L}^2} \|k\|^2_{\mathcal{K}}$, az azonosításhoz használt leképezés izometrikus, egy sűrű lineáris altérről egy altérre, már csak azt kell megmutatnunk, hogy az is sűrű:

$$\psi : X \to \mathcal{K} \quad \psi(x) \in \mathcal{K}.$$

Ekkor ha $k_n \in \mathcal{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ teljes ortonormált rendszer, akkor

$$\psi(x) = \sum_n \langle k_n, \psi(x)\rangle k_n =: \sum_n \varphi_n(x) k_n$$

a fenti alakú lineárkombinációk határértéke. ■

Megjegyzés Az alkalmazásokban legtöbbször $\mathcal{K}$ véges dimenziós, akkor a lezárást meg sem kell nézni, az egész térre kiterjeszthető.

Megjegyzés A fenti állítás segítségével triviálissá válik az alábbi állítás:

3.9.4. Állítás. *$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ szeparábilis.*

3.10. Feladatok

3.1. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy $C(K)$ normája nem származik skalárszorzatból, ha K nem egyelemű!*

Megoldás Legyen $\emptyset \neq A \subsetneq K$ kompakt, és $f \in C(K)$ olyan függvény, hogy $f|_A = 0$ és $\|f\| = 1$, továbbá $f \geq 0$, és legyen $g = 1$. Ekkor

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 5 \neq 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = 4,$$

azaz nem teljesül a paralellogramma–egyenlőség, így a norma nem származhat skalárszorzatból.

3.2. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{L}^p_\mu(X)$, ha $x \neq 2$, szintén nem skalárszorzatos.*

Megoldás Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér σ-végessége miatt van olyan $E, F \subset \mathcal{A}$, hogy $E \cap F = \emptyset$, és $0 \neq \mu(E), \mu(F) < \infty$, ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy χ_E-re és χ_F-re sem teljesül a paralellogramma–egyenlőség.

3.3. Feladat. *Legyen $x_n \in \mathcal{H}$ $(n \in \mathbb{N})$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor*

$$\exists (w) \lim_n x_n \iff \forall y \in \mathcal{H}\ \exists \lim_n \langle y, x_n\rangle$$

Megoldás Tudjuk, hogy $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$, így csak azt kell belátnunk, hogy $\exists x$, hogy $\lim_n \langle y, x_n\rangle = \langle y, x\rangle$. A biduálisban nyilvánvalóan van, és $\mathcal{H}$, mivel Hilbert–tér, reflexív.

3.4. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha $x_n, y_n \in \mathcal{H}$ $(n \in \mathbb{N})$ és $\exists \lim_n \|x_n\|^2 = \lim_n \|y_n\|^2 = \lim_n \langle y_n, x_n\rangle$, akkor $\exists \lim_n (y_n - x_n) = 0$!*

Megoldás Ha a

$$\|y_n - x_n\|^2 = \|y_n\|^2 - \langle y_n, x_n\rangle - \langle x_n, y_n\rangle + \|x_n\|^2$$

egyenlőség jobb oldalának vesszük az $n \to \infty$ határértékét, akkor az állítás feltételei szerint nullát kapunk, ez pedig éppen a kívánt eredmény. A feladat megoldása jól illusztrálja, hogy Hilbert–terekkel kapcsolatos feladatok esetén hatékony a normák helyett a normanégyzetekkel dolgozni.

3.5. Feladat. *Tudjuk, hogy Banach–tér Schauder–bázisán megadott korlátos lelképezés nem feltétlenül terjeszthető ki az egész téren értelmezett folytonos lineáris leképezéssé. Adjunk elégséges feltételt arra, hogy egy Hilbert–tér Schauder–bázisán megadott leképezés kiterjeszthető legyen!*

Megoldás Legyen a $\mathcal{H}$ Hilbert–tér egy teljes ortonormált rendszere $(e_n|n \in \mathbb{N})$, es $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, $e_n \mapsto Ae_n$ korlátos, azaz $\|Ae_n\| \le K\|e_n\|$. Ekkor ha

$$\sum_n \|Ae_n\| = \sum_{n,m} |\langle e_m, Ae_n\rangle|^2 < \infty,$$

akkor az operátor kiterjeszthető.

3.6. Feladat. $\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^1)$*-ben* $(id^n|n \in \mathbb{Z})$ *teljes ortonormált rendszer.*

Megoldás írjuk $\mathbb{S}^1$ elemeit $e^{i\alpha}$ alakba, és ezzel vezessük vissza a feladatot $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$-n az exponenciálisokra vonatkozó tételre.

3.7. Feladat. *Lássuk be az exponenciálisokra alkalmazott bizonyítás mintájára, hogy* $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$*-ben a nyílt végű állóhullámok*

$$\left\{\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\cos\bullet n, \frac{1}{2\pi}\sin\bullet\frac{2n+1}{2}\,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{2\pi}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2\pi}\cos\bullet\frac{n+1}{2}\,\middle|\, n \textit{ páratlan}\right\}$$
$$\cup \left\{\frac{1}{2\pi}\sin\bullet\frac{2n+1}{2}\,\middle|\, n \in \mathbb{N} \textit{ páros}\right\}$$

és a nyílt végű állóhullámok

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\cos\bullet\frac{2n-1}{2}\,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{2\pi}\sin\bullet\frac{n+1}{2}\,\middle|\, n \textit{ páratlan}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2\pi}\cos\bullet\frac{n+1}{2}\,\middle|\, n \in \mathbb{N}_0 \textit{ páros}\right\}$$

teljes ortonormált rendszerek.

4. fejezet

Hilbert–terek operátorai

4.1. Operátorok adjungáltja. Az adjungált tulajdonságai

A lineáris algebrából ismert (ld. Matolcsi: Analízis II.), hogy ha $A : V \to V$ lineáris operátor, akkor definiálható ennek a transzponáltja, $A^* : V^* \to V^*$, $p \mapsto p \circ A$. Ha V pszeudoeuklideszi vektortér, akkor a $V^* \equiv V$, $x \equiv h(x, \cdot)$ azonosítást felhasználva a transzponált helyett bevezethettük az adjungáltat, $A^* : V \to V$, $x \mapsto h(x, A\cdot)$-t. Most ennek a Hilbert–terek esetén alkalmazható általánosítását fogjuk vizsgálni.

A továbbiakban használni fogjuk a bra–vektor jelölést: minden $x \in \mathcal{H}$ elemhez hozzárendelünk egy $\mathcal{H}'$-beli elemet a kanonikus azonosítás felhasználásával:

$$\mathcal{H} \ni x \equiv \langle x| := (\mathcal{H} \to \mathbb{K} \ , \ y \mapsto \langle x, y\rangle) \in \mathcal{H}'.$$

4.1.1. Definíció. *Legyen $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sűrűn értelmezett lineáris leképezés ($\overline{\mathrm{Dom}\, A} = \mathcal{H}$). Ekkor*

$$Dom\, A^* := \{y \in \mathcal{H}\, | \langle y| \circ A \text{ folytonos}\} ,$$

az

$$A^* : Dom\, A^* \to \mathcal{H} \ , \ \langle A^* y| := \overline{\langle y| \circ A}$$

leképezést az A operátor **adjungáltjá***nak nevezzük.*

Megjegyzés Vegyük észre a definíció furcsaságát! Nem az y-hoz rendelt A^*y vektort, hanem az ehhez tartozó funkcionált adtuk meg.

A definícióból triviálisan következik, hogy ha $x \in \mathrm{Dom}\, A$ és $y \in \mathrm{Dom}\, A^*$, akkor

$$\langle A^* y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle,$$

azonban ha valamelyik oldal nem értelmes, akkor nem lehet az operátort az adjungáltjára cserélni, vagy fordítva.

4.1.1. Állítás. *Ha A a Hilbert–tér sűrűn értelmezett folytonos operátora ($\Rightarrow \exists \overline{A}$), akkor $A^* = \overline{A}^*$.*

Bizonyítás Ekkor $\mathrm{Dom}\, A^* = \mathcal{H}$, hiszen minden $y \in \mathcal{H}$ esetén $\langle y| \circ A$ folytonos leképezések kompozíciója. Hasonlóan $\mathrm{Dom}\, \overline{A}^*$ is az egész tér. Ekkor

$$\langle A^* y| = \overline{\langle y| \circ A}$$
$$\langle \overline{A}^* y| = \langle y| \circ \overline{A},$$

így mivel mind a kettő mindenhol értelmezett, és egy sűrű halmazon megegyeznek, a kettő szükségképpen ugyanaz. ■

4.1.2. Állítás. *Legyen $A \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$. Ekkor $A^* \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$ és $\|A^*\| = \|A\|$*

Bizonyítás

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle x, A^* y\rangle| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Ax, y\rangle| = \|A\| \quad ■$$

4.1.3. Állítás. *A^* zárt operátor.*

Bizonyítás A következőt kell belátnunk:

$$\left.\begin{array}{r} y_n \in \operatorname{Dom} A^* \exists \lim\limits_n y_n =: y \\ \exists \lim\limits_n A^* y_n =: z \end{array}\right| \Rightarrow y \in \operatorname{Dom} A^* \;\; A^* y = z.$$

Legyen $x \in \operatorname{Dom} A$. Ekkor teljesül a következő egyenlőség:

$$\langle A^* y_n, x\rangle = \langle y_n, Ax\rangle.$$

Az $n \to \infty$ határesetben a baloldal $\langle z, x\rangle$-hez tart, a jobboldal pedig $\langle y, Ax\rangle = (\langle y| \circ A)x$-hez, és mivel ez skalárszorzat alakba írható (jobboldal), ezért folytonos. ■

Érdemes megjegyeznünk a folytonosság bizonyításának módszerét: gyakran alkalmazott trükk, ha a bizonyítandó leképezést skalárszorzat alakjába írjuk.

4.1.4. Állítás. *Legyen $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sűrűn értelmezett lineáris operátor. Ekkor*
(i) $\operatorname{Dom}(A+B) = \operatorname{Dom} A \cap \operatorname{Dom} B$. Ha ez is sűrű, akkor $(A+B)^* \supset A^* + B^*$. Ha valamelyik folytonos, akkor egyenlőség áll fenn.
(ii) Ha $\operatorname{Dom}(AB) = \overset{-1}{B}(\operatorname{Dom} A)$ sűrű, akkor $(AB)^* = B^* A^*$, és ha A folytonos, akkor egyenlőség áll fenn.
(iii) Ha $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, akkor $(\lambda A)^* = \lambda^* A^*$, és $(0A)^* = 0 \supset 0A^*$.
(iv) Ha $A \subset B$, akkor $B^* \subset A^*$.
(v) Ha $\operatorname{Dom} A^*$ sűrű, akkor értelmes A^{**}, és ekkor $A^{**} \supset A$

Bizonyítás (i) Legyen $y \in \operatorname{Dom} A^* \cup \operatorname{Dom} B^*$. Ekkor $\langle y| \circ A$ és $\langle y| \circ B$ is folytonos. Ebből következik, hogy $\langle y| \circ A + \langle y| \circ B = \langle y| \circ (A+B)$ is az, tehát $y \in \operatorname{Dom}(A+B)^*$. Már csak azt kell belátnunk, hogy ugyanazt az értéket is veszik fel:

$$\langle (A^* + B^*)y, x\rangle = \langle A^* y, x\rangle + \langle B^* y, x\rangle,$$

és ha $x \in \overline{\operatorname{Dom} A \cap \operatorname{Dom} B}$, akkor

$$\langle A^* y, x\rangle + \langle B^* y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle + \langle y, Bx\rangle = \langle y, (A+B)x\rangle = \langle (A+B)^* y, x\rangle,$$

így, mivel x sűrű halmazt fut végig, és azon megegyeznek, így az egyértelmű kiterjeszthetőség miatt

$$(A^* + B^*)y = (A+B)^* y.$$

($\langle (A^* + B^*)y - (A+B)^* y, x\rangle = 0$ alakba írható a fenti egyenlőség, és egy sűrű halmaz ortogonálisában csak a 0 van.)

Még be kell látnunk, hogy ha az egyik, mondjuk A folytonos, akkor fennáll az egyenlőség. Természetesen elég a fordított irányú tartalmazást belátnunk. Legyen $y \in \operatorname{Dom}(A+B)^*$. Ekkor

$$\left.\begin{array}{r} \langle y| \circ (A+B) \text{ folytonos} \\ \langle y| \circ A \text{ eleve folytonos} \end{array}\right| \Rightarrow \langle y| \circ B \text{ folytonos},$$

hiszen két folytonos leképezés különbsége, így $y \in \operatorname{Dom} B^* = \operatorname{Dom}(A+B)^*$, mivel A^* mindenütt értelmezett.

(ii) Legyen $y \in \operatorname{Dom}(B^* A^*)$. Ekkor $y \in \operatorname{Dom} A^*$ és $A^* y \in \operatorname{Dom} B^*$, ezért $\langle y| \circ A$ folytonos, és $\langle A^* y| \circ B$ is folytonos, így $\langle y| \circ A \circ B$, mivel az utóbbi leszűkítése, szintén folytonos, azaz $y \in \operatorname{Dom}(AB)^*$.

$$\langle B^* A^* y, x\rangle = \langle A^* y, Bx\rangle = \langle y, ABx\rangle = \langle (AB)^* y, x\rangle,$$

ha $x \in \operatorname{Dom}(AB)$ (ekkor tehetjük meg az első és a második átrendezést). mivel x sűrű halmazt fut be, az állítás szükségképpen teljesül.

Ha A folytonos, akkor a fordított irányú tartalmazást is beláthatjuk: legyen $y \in \operatorname{Dom}(AB)^*$, azaz legyen $\langle y| \circ AB$ folytonos. Ekkor, ha A folytonos, ez az $\langle A^*| \circ B$ alakba írható, ebből következően $y \in \operatorname{Dom} A^*$ (de az úgyis az egész), $A^* y \in \operatorname{Dom} B^*$, és $y \in \operatorname{Dom}(B^* A^*)$.

(iii) triviális.

(iv) triviális

(v) Legyen $y \in \operatorname{Dom} A^*$ és $x \in \operatorname{Dom} A$. Ekkor

$$\langle y, Ax\rangle = \langle A^* y, x\rangle.$$

Ennek az egyenlőségnek a komplex konjugáltját véve

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle.$$

Látható, hogy mivel $x \in \operatorname{Dom} A$, $(\langle x| \circ A^*)y$ ugyanaz, mintha Ax-szel szoroznánk, tahát folytonos, azaz

$$x \in \operatorname{Dom} A \Rightarrow x \in \operatorname{Dom} A^{**} \text{ és } A^{**}x = Ax\blacksquare$$

4.1.5. Állítás. *Legyen A sűrűn értelmezett lineáris operátor. Ekkor $Ker A^* = (Ran\, A)^\perp$.*

Bizonyítás ($\subset$) Legyen $y \in \operatorname{Ker} A^*$, azaz $A^*y = 0$. Ekkor $\forall x \in \mathcal{H}$, speciálisan $\forall x \in \operatorname{Dom} A$ esetén

$$\langle A^*y, x\rangle = 0,$$

azonban a baloldal átírható $\langle y, Ax\rangle$ alakba is. Ekkor miközben x befutja $\operatorname{Dom} A$-t, Ax befutja $\operatorname{Ran} A$-t.

($\supset$) Legyen $y \perp \operatorname{Ran} A$, azaz $\langle y, Ax\rangle = 0$ ($\forall x \in \operatorname{Dom} A$). Ekkor $\langle A^*y, x\rangle = 0$ szintén $\forall x \in \operatorname{Dom} A$ esetén, így mivel x sűrű részhalmazt fut be, $A^*y = 0$ $\blacksquare$

4.1.6. Állítás. *Legyen A sűrűn értelmezett injektív operátor. Ekkor A^* is injektív és $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.*

Bizonyítás

$$\begin{aligned} AA^{-1} \subset I \quad & I = (AA^{-1})^* \supset (A^{-1})^* A^* \\ A^{-1}A \subset I \quad & I = (A^{-1}A)^* \supset A^*(A^{-1})^*, \end{aligned}$$

így $(AA^{-1})^* \supset I^* = I$, és I mindenhol értelmezett, így $(AA^{-1})^* = I$.

A^* jobbról és balról komponálva is az identitás része csak úgy lehet, ha injektív. Amivel komponáltuk, az az inverz, és nem csak egy leszűkítettje, ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} (A^{-1})^* A^* &= \operatorname{Dom} A^* \\ \operatorname{Dom} A^*(A^{-1})^* &= \operatorname{Dom} A^*, \end{aligned}$$

vagy ami ezzel egyenértékű, ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Ran} A^* &\subset \operatorname{Dom} (A^{-1})^* \\ \operatorname{Ran} (A^{-1})^* &\subset \operatorname{Dom} A^*. \end{aligned}$$

Ez pedig teljesül, hiszen ha $z \in \operatorname{Ran} A^*$, azaz $\exists x \in \operatorname{Dom} A^*$, hogy $z = A^*x$, akkor $\langle x| \circ A$ folytonos. Azt szeretnénk belátni, hogy folytonos

$$\langle z| \circ A^{-1} = \langle A^*x| \circ A^{-1} = \langle x| \circ A \circ A^{-1} = \langle x|$$

is, ami így már nyilvánvaló, tehát $z \in \operatorname{Dom} (A^{-1})^*$, és ezzel beláttuk az ezirányú tartalmazást is. $\blacksquare$

4.2. Ortogonális projektorok

Ebben a szakaszban olyan operátorokkal fogunk foglalkozni, amelyek folytonosak, a négyzetük önmagukkal egyenlő és a magjuk az értékkészletükre merőleges. Ezeket ortogonális projektoroknak nevezzük, definíciójuk korábban már szerepelt.

4.2.1. Állítás. *A P projektor pontosan akkor ortogonális, ha önadjungált.*

Bizonyítás ($\Leftarrow$) tudjuk, hogy $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Ran} P)^\perp$, így ha $P^* = P$, akkor ez teljesül, már csak a folytonosságot kell belátnunk:

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle = \langle x, Px\rangle \le \|x\|\|Px\|,$$

ahol a másodikból a harmadik az önadjungáltság felhasználásával következett, az adjungáltat át lehetett vinni, mivel $Px \in \operatorname{Dom} P$, mert P projektor. Ha $\|Px\| = 0$, akkor triviális a folytonosság, ha nem, akkor le lehet osztani vele, így

$$\|Px\| \le \|x\|,$$

így bebizonyítottuk P folytonosságát. az ortogonális projektor mindenhol értelmezett: sűrűn értelmezett folytonos operátor adjungáltja mindenhol értelmezett.

($\Rightarrow$) $\operatorname{Ker} P^* = (\operatorname{Ran} P)^\perp = \operatorname{Ker} P$, mivel P ortogonális projektor. Ekkor

$$\left.\begin{aligned} PP &= P \\ (P^*)^2 &= P^*P^* = P^* \text{ sűrűn értelmezett folytonos} \end{aligned}\right| \Rightarrow P^* \text{projektor, és persze folytonos}$$

Azt már tudjuk, hogy $P^{**} = P$, így

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} P^{**} &= (\operatorname{Ran} P^*)^\perp \\ \operatorname{Ker} P &= (\operatorname{Ran} P)^\perp, \end{aligned}$$

amiből következik, mivel $\operatorname{Ker} P^{**} = \operatorname{Ker} P$, hogy $\operatorname{Ran} P \subset \operatorname{Ran} P^*$. Ugyanezt a gondolatmenetet P^*-gal és P^{**}-gal megismételve kapjuk, hogy

$$\operatorname{Ran} P^* \supset \operatorname{Ran} P^{**} = \operatorname{Ran} P,$$

és ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

4.3. Szimmetrikus, önadjungált és unitér leképezések

4.3.1. Definíció. *Legyen A sűrűn értelmezett lineáris operátor. az mondjuk, hogy*
– *A* **szimmetrikus***, ha $A \subset A^*$*
– *A* **önadjungált***, ha $A = A^*$*
– *A* **unitér***, ha $A^* = A^{-1}$.*

Megjegyzés Vegyük észre a szimmetrikus és az önadjungált operátor közti igen lényeges – az alkalmazásokban többnyire elvétett – különbséget:

$$\begin{aligned} A \text{ szimmetrikus } A \subset A^* &\iff \forall x, y \in \operatorname{Dom} A \quad \langle y, Ax\rangle = \langle Ay, x\rangle \\ A \text{ önadjungált } A = A^* &\iff \operatorname{Dom} A = \operatorname{Dom} A^* \ \forall x, y \in \operatorname{Dom} A \quad \langle y, Ax\rangle = \langle Ay, x\rangle, \end{aligned}$$

tehát ha A csak szimmetrikus, de nem önadjungált, akkor lehet, hogy

$$\langle y, Ax\rangle = \langle A^*y, x\rangle,$$

de $y \notin \operatorname{Dom} A$, csak $y \in \operatorname{Dom} A^*$. Önadjungált operátor esetén ez nem lehetséges.

4.3.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy T* **formálisan szimmetrikus operátor***, ha*

$$\forall x, y \in \operatorname{Dom} T : \langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle.$$

Vegyük észre, hogy a szimmetrikussághoz ezen kívül az kell, hogy $\operatorname{Dom} T$ sűrű legyen.

4.4. Izometrikus leképezések

4.4.1. Definíció. *Egy $V : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn értelmezett leképezést* **izometrikus***nak nevezünk, ha*

$$\|Vx\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Ebből triviálisan következik, hogy V injektív, azonban – a véges dimenziós esettel ellentétben – az nem következik, hogy ráképezés. Erre példát is adunk: a $\ell^2 \to \ell^2$ jobbratolás $(a_1, a_2, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, \dots)$ operátor izometrikus, de nem ráképezés.

4.4.1. Állítás. *Egy V operátor pontosan akkor izometrikus, ha megtartja a Hilbert–tér skalárszorzatát.*

Bizonyítás ($\Leftarrow$) triviális. ($\Rightarrow$) Ekkor azt fogjuk felhasználni, hogy $\forall x, y \in \operatorname{Dom} V$ esetén

$$\|x + y\|^2 = \|V(x + y)\|^2,$$

azaz ezt kifejtve

$$\|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \|Vx\|^2 + \langle Vx, Vy\rangle + \langle Vy, Vx\rangle + \|Vy\|^2.$$

Ebből, mivel V izometrikus, az első és az utolsó tagot mindkét oldalon elhagyva kapjuk, hogy

$$\mathfrak{Re}\langle x, y\rangle = \mathfrak{Re}\langle Vx, Vy\rangle.$$

Ha a tér valós, akkor ezzel készen is vagyunk, ha nem, akkor y helyére iy-t írva megkapjuk a képzetes részre vonatkozó egyenlőséget is. ∎

4.4.2. Állítás. *Egy operátor pontosan akkor unitér, ha mindenütt értelmezett izometrikus bijekció.*

Bizonyítás ($\Leftarrow$) Ha A mindenhol értelmezett izometrikus bijekció, akkor $\forall x, y \in \mathcal{H}$ esetén

$$\langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, A^*Ay\rangle,$$

ahol az adjungált beírása lehetséges, mert mindenütt értelmezett folytonos operátorral van dolgunk. Ebből következik, hogy $A^*A = I$, ami még minden izometrikus operátorra igaz, de unitér operátorokra fordítva is. Mivel A bijekció, ebből már következik, hogy $AA^* = I$.

($\Rightarrow$) Ha A unitér operátor, akkor $\forall x \in \mathcal{H}$-ra igaz, hogy

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2,$$

hiszen $A^* = A^{-1}$ és $\operatorname{Dom} A^* = \operatorname{Ran} A$, tehát tényleg izometrikus. Azt kell még belátnunk, hogy mindenütt értelmezett. Mivel $A^* = A^{-1}$, A^{-1} zárt izometrikus ($\Rightarrow$ folytonos), így $\operatorname{Dom} A^{-1} = \operatorname{Ran} A$ zárt.

A sűrűn értelmezett izometrikus, azt kellene még belátnunk, hogy zárt (akkor már mindenütt értelmezett lenne). A^{-1} zárt, így ez is teljesül.

Még be kell látnunk, hogy $\operatorname{Ran} A$ is az egész tér. mivel A mindenhol értelmezett és folytonos, $A^{**} = A$. $\{0\} = \operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Ran} A)^\perp$, hiszen A^* injektív. ∎

Megjegyzés Érdemes külön is kiemelni a bizonyítás két fontos eredményét:

$$\begin{aligned} V \text{ izometrikus} &\iff V^*V = I \\ V \text{ unitér} &\iff U^*U = UU^* = I \end{aligned}$$

4.4.3. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert–tér, és $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris operátor. Ekkor $\langle x, Ax\rangle = 0$ $\forall x \in \mathcal{H}$, ha $A = 0$.*

Bizonyítás ($\Leftarrow$) triviális. ($\Rightarrow$) Ehhez ki kell használnunk a tér komplex voltát, hiszen a jobboldal valamennyi valós antiszimmetrikus operátorra teljesül.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x + y, A(x + y)\rangle = \langle x, Ax\rangle + \langle x, Ay\rangle + \langle y, Ax\rangle + \langle y, Ay\rangle \\ 0 &= \langle x + iy, A(x + iy)\rangle = \langle x, Ax\rangle + \langle x, Aiy\rangle + \langle iy, Ax\rangle + \langle iy, iAy\rangle = i(\langle x, Ay\rangle - \langle y, Ax\rangle) \end{aligned}$$

A feltételek szerint eleve nulla tagokat (első és negyedik) elhagyva kapjuk, hogy $\langle x, Ay\rangle$ és $\langle y, Ax\rangle$ összege és különbsége is nulla, ez pedig csak úgy lehetséges, ha mind a kettő nulla. ∎

Megjegyzés Érdekes, hogy valós térben a szimmetrikus és az antiszimmetrikus operátorok kiegészítő altereket alkottak, komplexben viszont egyazon altér elemei

$$\begin{aligned} A \text{ önadjungált} &\iff (iA) \text{ anti–önadjungált} \\ A \text{ anti–önadjungált} &\iff (iA) \text{ önadjungált.} \end{aligned}$$

Erről egyszerű számolással könnyen meggyőződhetünk, azt kell csak felhasználnunk, hogy az adjungálás antilineáris művelet.

4.5. Néhány konkrét operátor

Tekintsük először $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$-t. Ekkor a $\varphi : (-\pi,\pi) \to \mathbb{C}$ abszolút függvényeknek értelmezhetjük a deriváltját. Tudjuk ugyanis, hogy egy abszolút folytonos függvény mindig integrálfüggvény. ugyan ez csak m.m. jól definiált, de itt úgy is csak függvényosztályokat vizsgálunk a majdnem mindenütt egyenlőség ekvivalenciareláció erejéig. Ez teszi lehetővé a következő definíciót:

4.5.1. Definíció. *Értelmezükk $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$-n a következő* **differenciáloperátorokat***:*

$$\begin{aligned} \mathit{Dom}\, D &:= \left\{\varphi \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi) \,\middle|\, \varphi \text{ abszolút folytonos, } \varphi' \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi)\right\} & D\varphi &:= -i\varphi' \\ \mathit{Dom}\, P_\alpha &:= \{\varphi \in \mathit{Dom}\, D \,|\, \varphi(\pi) = \alpha\varphi(-\pi)\} & P_\alpha\varphi &:= -i\varphi' \ (\alpha \in \mathbb{S}^1) \\ \mathit{Dom}\, P_0 &:= \{\varphi \in \mathit{Dom}\, D \,|\, \varphi(\pi) = \varphi(\pi) = 0\} & P_0\varphi &:= -i\varphi' \end{aligned}$$

4.5.1. Állítás. *$\mathit{Dom}\, P_0$ sűrű.*

Bizonyítás a differenciálható, két végükön nulla függvények benne vannak. Tetszőleges részintervallum karakterisztikus függvénye megközelíthető differenciálható függvények sorozatával. ■

4.5.2. Állítás. $P_0^* = D$

Bizonyítás Legyen $\varphi \in \mathrm{Dom}\, P_0$ és $\psi \in \mathrm{Dom}\, D$. Ekkor

$$\langle\psi, P_0\varphi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \psi^*(-i\varphi') = -i\psi^*\varphi|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} (-i\psi')^*\varphi,$$

amiből következik, hogy $D \subset P_0^*$, és $\psi \in \mathrm{Dom}\, D$ esetén $\langle\psi| \circ P_0 = \langle D\psi|$.

A másik irányú tartalmazás bizonyítása: legyen $\psi \in \mathrm{Dom}\, P_0$. Ekkor $P_0\psi \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi) \subset \mathcal{L}(-\pi,\pi)$, így értelmes a

$$\eta := i\left(\delta + \int_{-\pi} P_0^*\psi\right)$$

definíció, ahol $\delta \in \mathbb{K}$-t úgy kell megválasztani, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\eta - \psi) = 0$$

legyen. Ekkor $\eta \in \mathrm{Dom}\, P_0$, mert abszolút folytonos, és az intervallum mindkét végpontjában a nulla értéket veszi fel. Azt is tudjuk, hogy $D\eta = P_0^*\psi$, így

$$\int_{-\pi}^{\pi} (-i\eta')\varphi = \langle P_0^*\psi, \varphi\rangle = \langle\psi, P_0\varphi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \psi^*(-i\varphi').$$

A baloldalon lehet parciálisan integrálni, akkor a

$$\eta^*\varphi|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \eta^*(-i\varphi')$$

kifejezést kapjuk, amiben az első tag nulla. Ezt átrendezve $\forall\varphi \in \mathrm{Dom}\, P_0$-ra

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\eta - \psi^*)\varphi' = 0,$$

speciálisan a $\varphi := \int_{-\pi}(\eta - \varphi)$, $\psi' = \eta - \psi$ esetén is. Ekkor δ definíciójából adódóan $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0$, így $\varphi \in \mathrm{Dom}\, P_0$, és azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\eta - \varphi|^2 = 0 \ \Rightarrow\ \psi = \eta \ (\text{m.m.}),$$

így $\psi \in \mathrm{Dom}\, D$, és ez kellett a fordított irányú tartalmazáshoz. ■

4.5.3. Állítás. $D^* = P_0$.

Bizonyítás ($\supset$) nyílvánvaló, hiszen $P_0 \subset D$, így $D^* \subset P_0^* = D$.

($\subset$) Legyen $\varphi \in \operatorname{Dom} D^*$ és $\psi \in \operatorname{Dom} D$. Ekkor az adjungált definíciója alapján

$$\langle \varphi, D\psi \rangle = \langle D^*\varphi, \psi \rangle.$$

A baloldal a definíció szerint

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^*(-i\psi'),$$

és a fenti tartalmazás alapján tudjuk, hogy D^* is differenciáloperátor, így a jobboldal is

$$\int_{-\pi}^{\pi} (-i\varphi')^*\psi$$

alakba írható, már csak az értelmezési tartományát nem ismerjük. A bal oldalon parciálisan integrálva a következőt kapjuk:

$$-i\varphi^*\psi|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} (-i\varphi')^*\psi,$$

amit a jobboldallal összevetve adódik, hogy

$$\varphi^*(\pi)\psi(\pi) - \varphi^*(-\pi)\psi(-\pi) = 0 \quad \forall\psi \in \operatorname{Dom} D.$$

Legyen ψ olyan, hogy $\psi(-\pi) = 0$, ám $\psi(-\pi) \neq 0$ (tudjuk, hogy van ilyen, pl. a $\int_{-\pi} 1$ függvény), ekkor az előbbiekből leolvasható, hogy $\varphi(\pi) = 0$.

Teljesen hasonlóan kapjuk egy olyan ψ-t választva, hogy $\psi(\pi) = 0$ és $\psi(-\pi) \neq 0$ (pl. $2\pi - \int_{-\pi} 1$) kapjuk, hogy $\varphi(-\pi) = 0$.

Ezzel beláttuk, hogy $D^* \subset P_0$. ■

Következmény Mivel D és P_0 egymás adjungáltjai, szükségképpen zárt operátorok.

4.5.4. Állítás. *Legyen $\alpha \in \mathbb{S}^1$. Ekkor $P_\alpha^* = P_\alpha$, azaz a P_α operátorok önadjungáltak.*

Bizonyítás ($\supset$) szimmetrikus: ezt könnyű belátni. Legyen $\varphi, \psi \in \operatorname{Dom} P_\alpha$. Ekkor

$$\langle \varphi, P_\alpha\psi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^*(-i\psi')^* = -i\varphi^*\psi|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} (-i\varphi')^*\psi = \langle P_\alpha\varphi, \psi \rangle,$$

ahol a második egyenlőségnél parciálisan integráltunk, a harmadiknál pedig felhasználtuk, hogy

$$\varphi^*(\pi)\psi(\pi) - \varphi^*(-\pi)\psi(-\pi) = \alpha^*\varphi^*(-\pi)\alpha\psi(-\pi) - \varphi^*(-\pi)\psi(-\pi) = 0,$$

mivel $\alpha^*\alpha = 1$.

($\subset$) Legyen $\varphi \in \operatorname{Dom} P_\alpha^*$ és $\psi \in \operatorname{Dom} P_\alpha$. Ekkor az adjungált definíciója szerint

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^*(-i\psi') = \langle \varphi, P_\alpha\psi \rangle = \langle P_\alpha^*\varphi, \psi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (-i\varphi')^*\psi.$$

A bal oldal parciálisan integrálva egyenlő a

$$-i\varphi^*\psi|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} (-i\varphi')^*\psi$$

kifejezéssel, így az egyenlőség két oldalát összevetve ismét azt kapjuk, hogy

$$\varphi^*(\pi)\psi(\pi) - \varphi^*(-\pi)\psi(-\pi) = 0,$$

és tudjuk, hogy $\psi(\pi) = \alpha\psi(-\pi)$. Tudjuk, hogy van olyan függvény, amely a $-\pi$ helyen nem nulla, és benne van P_α értelmezési tartományában, például ha $\alpha = \exp(i\beta)$, akkor az

$$x \mapsto e^{i(\beta x/2\pi + \beta/2)}$$

függvény a $-\pi$ helyen 1-et vesz fel, a π helyen α-t, így ezzel leosztva kapjuk, hogy

$$\alpha\varphi^*(\pi) = \varphi^*(-\pi),$$

amiből már egyszerűen konjugálással következik, hogy

$$\varphi(\pi) = \alpha\varphi(-\pi),$$

ahol felhasználtuk, hogy $\alpha^* = 1/\alpha$. ■

4.5.2. Definíció. *Legyen a P* **operátor** *értelmezési tartománya*

$$\mathrm{Dom}\, P := \left\{\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) | \varphi \text{ abszolút folytonos}, \varphi' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})\right\},$$

és hozzárendelési szabálya

$$P\varphi := -i\varphi'.$$

A következő állításban azt látjuk be, hogy ez az operátor egybeesik a korlátos intervallumok esetén definiált D, P_α és P_0 operátorokkal, azaz az egész valós egyenes esetén a fentiek már „kiszabják maguknak" a peremfeltételeket.

4.5.5. Állítás. *Ha $\varphi \in \mathrm{Dom}\, P$, akkor $\lim\limits_{\pm\infty} \varphi = 0$.*

Bizonyítás Legyen φ olyan függvény, hogy $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ és $\varphi' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Ekkor a Hölder–egyenlőtlenség (ld. Matolcsi: Analízis V.) alapján $\varphi\varphi' \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Ekkor

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\varphi' = \int_0^\infty \varphi\varphi' + \int_{-\infty}^0 \varphi\varphi',$$

és ebben már lehet parciálisan integrálni. Az első tag:

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \varphi\varphi' = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \left(\frac{\varphi^2}{2}\right)' = \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi^2(x)}{2} - \frac{\varphi^2(0)}{2},$$

és mivel a fenti integrál létezik, ez a határérték is létezik, azaz

$$\exists \lim_{x\to\infty} \varphi^2(x),$$

és mivel φ négyzetesen integrálható, φ^2 is integrálható, és egy integrálható függvény határértéke a végtelenben csak a nulla lehet (ld. Matolcsi: Analízis V.), azaz

$$\lim_{\infty} \varphi^2 = 0 \Rightarrow \lim_{\infty} \varphi = 0,$$

teljesen azonos gondolatmenettel beláthatjuk azt is, hogy

$$\lim_{-\infty} \varphi = 0,$$

és ezzel állításunkat bebizonyítottuk. ■

4.5.6. Állítás. *A P operátor önadjungált, azaz $P^* = P$.*

Bizonyítás Először belátjuk, a $(\supset)$ irányú tartalmazást, azaz, hogy P szimmetrikus. Legyen $\varphi, \psi \in \mathrm{Dom}\, P$. Ekkor

$$\langle\varphi, P\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi^*(-i\psi') = -i\varphi^*\psi|_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} (-i\psi')^*\psi = \langle P\varphi, \psi\rangle,$$

ahol a második egyenlőségnél parciálisan integráltunk.

$(\subset)$ Legyen $\varphi \in \mathrm{Dom}\, P^*$, $\psi \in \mathrm{Dom}\, P$ és $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Ekkor mivel $P^*\varphi$ négyzetesen integrálható, $\chi_{[a,b]}P^*\varphi$ is $\mathcal{L}^2(a,b) \subset \mathcal{L}(a,b)$ eleme.

Legyen

$$\eta := i\left(\delta + \int_a P^*\varphi\right)\chi_{[a,b]},$$

ahol $\delta \in \mathbb{K}$ olyan, hogy $\int_a^b (\eta - \varphi) = 0$. Ekkor, ha $\psi = \psi\chi_{[a,b]}$, akkor

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi^*(-i\psi') = \langle\varphi, P\psi\rangle = \langle P^*\varphi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} (P^*\varphi)^*\psi = \int_a^b (P^*\varphi)^*\psi = (-i\eta)^*\psi|_a^b + \int_a^b \eta^*(-i\psi').$$

A harmadik egyenlőségnél parciálisan integráltunk. Ezután az első tag nulla, mert $[a,b]$-n kívül ψ nulla, és abszolút folytonos, így

$$\int_a^b (\eta - \varphi)^*\psi' = 0.$$

Legyen

$$\psi := \chi_{[a,b]} \int_a (\eta - \varphi).$$

Ez abszolút folytonos függvény, így beírhatjuk az előbbi egyenlőségbe

$$\int_a^b |\eta - \psi|^2 = 0,$$

vagyis

$$\eta \chi_{[a,b]} \underset{\text{m.m.}}{=} \varphi \chi_{[a,b]},$$

és ezzel készen vegyunk, hiszen ha φ bármely $[a,b]$ intervallumra leszűkítve egy abszolút folytonos függvénnyel egyenlő, akkor szükségképpen abszolút folytonos. ■

4.6. Szorzásoperátorok

Ebben a szakaszban négyzetesen integrálható függvények terének operátoraival fogunk foglalkozni: legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér. Most az $\mathcal{L}^2_\mu(X)$ térrel fogunk foglalkozni.

4.6.1. Definíció. *Legyen $f : X \to \mathbb{K}$ μ-mérhető függvény. Ekkor*

$$\mathrm{Dom}\, M_f := \{\varphi \in \mathcal{L}^2_\mu(X) | f\varphi \in \mathcal{L}^2_\mu(X)\}$$

és

$$M_f \varphi := f\varphi.$$

Ekkor az M_f operátort az f **függvénnyel való szorzás operátorá***nak nevezzük.*

A definícióból triviálisan következik, hogy $\mathrm{Dom}\, M_f$ lineáris altér, és M_f lineáris leképezés.

4.6.1. Állítás. *A függvénnyel való szorzás operátorok sűrűn értelmezettek.*

Bizonyítás $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $E_n := \{x \in X \,||f(x)| \leq n\} \subset \mathcal{A}$, hiszen f mérhető függvény. Legyen $\psi \in \mathcal{L}^2_\mu(X)$. Ekkor elég megmutatnunk, hogy $\chi_{E_n}\psi \in \mathrm{Dom}\, M_F$ és $\lim_n \chi_{E_n}\psi = \psi$. Ez teljesül, hiszen

$$|f\chi_{E_n}\psi|^2 \leq n^2 |\psi|^2,$$

tehát van integrálható majoránsa, így integrálható.

Az is igaz, hogy $\lim_n \chi_{E_n}\psi = \psi$, hiszen

$$\lim_n \|\chi_{E_n}\psi - \psi\|^2 = \lim_n \int_X |\chi_{E_n}\psi - \psi|^2 d\mu = 0$$

a Lebesgue–tétel (ld. Matolcsi: Analízis V.) miatt, $2|\psi|^2$ integrálható majoráns. ■

Vegyük észre, hogy triviálisan $\mathrm{Dom}\, M_f = \mathrm{Dom}\, M_{f^*}$.

4.6.2. Állítás. $(M_f)^* = M_{f^*}$*, és így M_f normális operátor, $M_{f^*}M_f = M_f M_{f^*}$.*

Bizonyítás $(\supset)$ Legyen $\varphi, \psi \in \mathrm{Dom}\, M_f = \mathrm{Dom}\, M_{f^*}$. Ekkor

$$\langle \varphi, M_f \psi \rangle = \int_X \varphi^* f \psi d\mu = \int_X (f^*\varphi)^* \psi d\mu = \langle M_{f^*}\varphi, \psi \rangle.$$

$(\subset)$ Most legyen $\varphi \in \mathrm{Dom}(M_f)^*$ és $\psi \in \mathrm{Dom}\, M_f$. Ez esetben tehát

$$\int_X (f^*\varphi)^* \psi d\mu = \langle \varphi, M_f \psi \rangle = \langle M_f^* \varphi, \psi \rangle = \int_X (M_f^*\varphi)^* \psi d\mu,$$

hiszen $\varphi^* f = (f\varphi)^*$, így egyoldalra rendezve, majd a két integrált összevonva

$$\int_X (M_f^*\varphi - f^*\varphi)^* \psi d\mu = 0. \tag{*}$$

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy $f^*\varphi$ négyzetesen integrálható (hiszen a fenti egyenlőség egy sűrű halmaz minden ψ elemére teljesül). Tekintsük ismét az

$$E_n := \{x \in X \,||f(x)| \leq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

halmazokat. Mivel f mérhető függvény, ezek mérhető halmazok. Ekkor az integrálszámításban szokásos becslés szerint

$$|f^*\varphi\chi_{E_n}|^2 \leq n^2|\varphi|^2,$$

azaz ezek négyzetesen integrálhatók, $M_f^*\varphi$ is, így

$$(M_f^*\varphi - f^*\varphi)\chi_{E_n} \in \operatorname{Dom} M_f \subset \mathcal{L}^2_\mu(X),$$

mert

$$|fM_f^*\varphi\chi_{E_n}|^2 \leq n^2|M_f^*\varphi|^2$$
$$|ff^*\varphi\chi_{E_n}|^2 \leq |\varphi|^2 n^4,$$

így a különbségük is benne van, tehát beírhatjuk (*)-ba ψ helyére, aminek eredményeképpen azt kapjuk, hogy

$$\int_{E_n} |M_f^*\varphi - f^*\varphi|^2 d\mu = 0.$$

Mivel

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X,$$

Beppo Levi tétele (ld. Matolcsi: Analízis V.) szerint megcserélhetjük az integrálást és a határátmenetet:

$$\int_X |M_f^*\varphi - f^*\varphi|^2 d\mu = 0 \Rightarrow M_f^*\varphi = f^*\varphi \Rightarrow \varphi \in \operatorname{Dom} M_{f^*},$$

és ezzel a bizonyítás véget ért. ∎

Következmény Az állítás szerint tehát valamennyi M_f operátor egy másik ilyen operátor adjungáltja, így zárt. Ebből következően pontosan akkor folytonos, ha mindenütt értelmezett.

4.6.3. Állítás. *Az f függvényhez tartozó M_f operátor pontosan akkor folytonos, ha $f \in \mathcal{L}^\infty_\mu(X)$, és ekkor $\|M_f\| = \|f|_\infty$.*

Bizonyítás ($\Leftarrow$) Ha $f \in \mathcal{L}^\infty_\mu(X)$, akkor triviálisan

$$\|f\varphi\| \leq \|f|_\infty \|\varphi\|,$$

így $\operatorname{Dom} M_f = \mathcal{L}^2_\mu(X)$, és

$$\|M_f\varphi\|^2 = \int_X |f\varphi|^2 d\mu \leq \|f|^2_\infty \int_X |\varphi|^2 d\mu,$$

amiből következik, hogy M_f folytonos és a normája kisebb vagy egyenlő f végtelen–normájával. Be kell még látnunk, hogy nagyobb vagy egyenlő is: legyen $0 < C < \|f|_\infty$ szám. Ekkor $\exists E \in \mathcal{A}$, hogy $0 < \mu(E) < \infty$, és $E \subset \{x||f(x)| \geq C\}$ a mértéktér σ-végessége miatt.

Vegyük a

$$\psi := \frac{\chi_E}{\sqrt{\mu(E)}}$$

függvényt! Ez négyzetesen integrálható, és a normája 1.

$$\|M_f\psi\|^2 = \int_X |f|^2 \frac{\chi_E}{\mu(E)} d\mu \geq C^2$$

amiből következik, hogy

$$\|M_f\| \geq C,$$

ebből pedig az állítás.

($\Rightarrow$) Tegyük fel, hogy $f \notin \mathcal{L}^\infty_\mu(X)$. Ekkor, mivel f mérhető függvény kiválasztható

$$\mathcal{A} \ni E_n \subset \{f \geq n\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

úgy, hogy

$$0 < \mu(E_n) \leq \infty,$$

hiszen ha valamelyik nívóhalmaz mértéke nulla lenne, akkor f $\mathcal{L}^\infty_\mu(X)$ eleme lenne, véges mértékűnek pedig a mértéktér σ-végessége miatt választhatók. Mivel M_f sűrűn értelmezett

$$\exists \varphi_{nm} \in \operatorname{Dom} M_f \quad \lim_m \varphi_{nm} = \frac{\chi_{E_n}}{\sqrt{\mu(E_n)}} \quad \varphi_{n,m} \leq \varphi_{n,m+1}$$

M_f értelmezési tartományában futó monoton növekvő sorozat,

$$\lim_m \|\varphi_{nm}\| = 1,$$

ugyanakkor, ha az integrálok sorozata egyáltalán korlátos felülről, akkor is

$$\int_X |f\varphi_{nm}|^2 \geq n^2$$

elég nagy n-ekre (hiszen ha az integrálok sorozata korlátos felülről, akkor Beppo Levi tétele (ld. Matolcsi: Analízis V.) szerint a határérték bevihető, és utána $|f|$ n-el alulról becsülhető). Mivel

$$\forall n, m \quad \|\varphi_{nm}\| \leq 1$$

a függvénysorozatok monoton növekedése és 1 normájú határértéke miatt:

$$\varphi_{nm} \in G_1(0),$$

és a fentiek miatt

$$\operatorname{diam}(\, M_f[G_1(0)]) \geq n \quad \forall n,$$

így Gruber: Analízis III. 10.1-es állítása szerint M_f nem folytonos. ■

4.6.4. Állítás. *$M_f = M_g$ pontosan akkor, ha $f = g$ μ-majdnem mindenütt.*

Bizonyítás ($\Leftarrow$) triviális. ($\Rightarrow$) már nem ilyen egyszerű. Legyen $\varphi \in \operatorname{Dom} M_f = \operatorname{Dom} M_g$. Ekkor $f\varphi = g\varphi$ m.m., azaz $f\varphi - g\varphi = 0$, így

$$\|f\varphi - g\varphi\|^2 = \int_X |f-g|^2 |\varphi|^2 d\mu = 0.$$

Legyen ismét

$$E_n := \{x \in X \,| |f(x)| \leq n, |g(x)| \leq n\},$$

ami mérhető, hiszen f és g mérhető függvények, és ez ezek nívóhalmazainak metszete. az is egyszerűen látható, hogy

$$\bigcup_n E_n = X,$$

és a μ mérték σ-végessége miatt X felbontható megszámlálható sok halmaz uniójára úgy, hogy

$$X = \biguplus_m H_m \quad 0 < \mu(H_m) < \infty,$$

és ekkor

$$\chi_{E_n \cap H_m} = \chi_{E_n}\chi_{H_m} \in \operatorname{Dom} M_f = \operatorname{Dom} M_g.$$

Ezeket a karakterisztikus függvényeket írva φ helyébe

$$\int_X |f-g|^2 \chi_{E_n \cap H_m} d\mu = 0 \quad \forall n, m.$$

Ekkor, mivel $E_n = \uplus_m(E_n \cap H_m)$, Beppo Levi tételét alkalmazva

$$\int_X |f-g|^2 \chi_{E_n} d\mu = 0,$$

és mivel az E_n halmazok monoton növekvőek, uniójuk X, Beppo Levi tételét ismét alkazmazva

$$\int_X |f-g|^2 d\mu = 0 \Rightarrow f \underset{\mu\text{-m.m.}}{=} g,$$

és ezzel a bizonyítás véget ért. ∎

4.6.5. Állítás. *A szorzásoperátorok néhány további jó tulajdonsága:*
(i) Ha $(0 \neq \alpha \in \mathbb{K})$ akkor $M_{\alpha f} = \alpha M_f$
(ii) $M_{f+g} \supset M_f + M_g$, és egyenlőség áll fenn, ha f vagy g korlátos.
(iii) $M_{fg} \supset M_f M_g$, és egyenlőség áll fenn, ha g korlátos.

Bizonyítás (i) triviális, csak a szorzásoperátorok definícióját kell felhsználni, és azt, hogy $\operatorname{Dom} M_f$ lineáris altér.

(ii) Legyen $\varphi \in \operatorname{Dom} M_f \cap \operatorname{Dom} M_g$. Ekkor

$$f\varphi, g\varphi \in \mathcal{L}^2_\mu(X) \Rightarrow f\varphi + g\varphi = (f+g)\varphi \in \mathcal{L}^2_\mu(X),$$

tehát benne van a bal oldal értelmezési tartományában, és ugyanazt is adja:

$$(M_f + M_g)\varphi = M_f\varphi + M_g\varphi = f\varphi + g\varphi = (f+g)\varphi.$$

Adunk példát arra is, amikor nincs egyenlőség: ha f nem lényegében korlátos függvény, és $g = -f$, akkor

$$M_f + M_g \subsetneq 0 \quad M_{f+g} = 0.$$

Legyen mondjuk g korlátos. Ekkor $\operatorname{Dom} M_g = \mathcal{L}^2_\mu(X)$ így

$$\left.\begin{aligned}(f+g)\varphi &\in \mathcal{L}^2_\mu(X)\\ g\varphi &\in \mathcal{L}^2_\mu(X)\end{aligned}\right| \Rightarrow f\varphi \in \mathcal{L}^2_\mu(X),$$

hiszen a másik kettő különbsége, és $\mathcal{L}^2_\mu(X)$ lineáris tér.

(iii) Legyen $\varphi \in \operatorname{Dom} M_f M_g$. Ekkor

$$\left.\begin{aligned}g\varphi &\in \mathcal{L}^2_\mu(X)\\ f(g\varphi) &\in \mathcal{L}^2_\mu(X)\end{aligned}\right| \Rightarrow (fg)\varphi \in \mathcal{L}^2_\mu(X), \tag{*}$$

tehát

$$\varphi \in \operatorname{Dom} M_f M_g \Rightarrow \varphi \in \operatorname{Dom} M_g \ \varphi \in \operatorname{Dom} M_{fg},$$

és a két operátor ugyanazt adja.

Ha g korlátos, akkor ha egy elem M_{fg} értelmezési tartományában van, akkor szükségképpen $M_f M_g$-ében is, hiszen ilyenkor $\operatorname{Dom} M_g$ az egész tér. ∎

4.6.6. Állítás. *Az előző állítások fontos következménye, hogy*
(i) M_f pontosan akkor önadjungált, ha $f = f^*$ μ-majdnem mindenütt.
(ii) M_f pontosan akkor unitér, ha $|f| = 1$ μ-majdnem mindenütt.
(iii) M_f pontosan akkor projektor, ha $f = f^* = f^2$ μ-majdnem mindenütt.

Bizonyítás triviális, egyszerűen azt az állítást kell alkalmaznunk, hogy

$$M_f^* = M_f,$$

illetve, hogy ha

$$f = f^* = f^2$$

μ-majdnem mindenütt, akkor f μ-majdnem mindenütt egyenlő egy karakterisztikus függvénnyel. ∎

4.7. Operátorok néhány egyéb tulajdonsága

Tekintsük a

$$V : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \quad (x, y) \mapsto (-y, x)$$

leképezést ($\mathcal{H} \times \mathcal{H}$-t az $\langle (x, y), (u, v)\rangle := \langle x, u\rangle + \langle y, v\rangle$ skalárszorzattal és az ez által indukált normával ellátva)! Ez izometrikus bijekció, hiszen

$$\|(-y, x)\|^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 = \|(x, y)\|^2,$$

így unitér leképezés. Ezt fel fogjuk használni a most következő állítások bizonyításában.

4.7.1. Állítás. *Legyen A sűrűn értelmezett lineáris operátor. Ekkor*

$$Graph\, A^* = (V[Graph\, A])^\perp.$$

Bizonyítás ($\subset$) Legyen $y \in \mathrm{Dom}\, A^*$! Ekkor $(y, A^*y) \in \mathrm{Graph}\, A^*$. Vegyünk egy x elemet A értelmezési tartományából. Ezzel

$$\langle (y, A^*y), V(x, Ax)\rangle = \langle (y, A^*y), (-Ax, A)\rangle = -\langle y, Ax\rangle + \langle A^*y, x\rangle = 0$$

az adjungált definíciója szerint.

($\supset$) Legyen $u, v \in \mathcal{H}$ olyan, hogy a fenti skalárszorzat nulla. Ekkor

$$0 = \langle (u, v), V(x, Ax)\rangle = \langle (u, v), (-Ax, x)\rangle = -\langle u, Ax\rangle + \langle v, x\rangle,$$

azaz $\forall x \in \mathrm{Dom}\, A$ esetén $\langle u, Ax\rangle = \langle v, x\rangle$, amiből következik, hogy $u \in \mathrm{Dom}\, A^*$, mert $\langle u| \circ A = \langle v|$ folytonos, és $A^*u = v$, így $(u, v) \in \mathrm{Graph}\, A^*$. Ekkor, mivel V megtartja az ortogonalitást, ez átírható a

$$\mathrm{Graph}\, A^* = V[(\mathrm{Graph}\, A)^\perp]$$

alakba. Erre V-t alkalmazva, mivel $VV = -1$

$$V[\mathrm{Graph}\, A^*] = (\mathrm{Graph}\, A)^\perp,$$

és ezzel a bizonyítást befejeztük. ∎

4.7.2. Állítás. *Ha A sűrűn értelmezett zárt operátor akkor $Dom\, A^*$ sűrű.*

Bizonyítás Legyen $z \in (\mathrm{Dom}\, A^*)^\perp$. Ekkor azt kell megmutatnunk, hogy $z = 0$. Az előző állítás felhasználásával

$$0 = \langle (0, z), V(y, A^*y)\rangle = \langle (0, z), (-A^*y, y)\rangle \Rightarrow (0, z) \in V[\mathrm{Graph}\, A^*] = (\mathrm{Graph}\, A)^{\perp\perp} = \mathrm{Graph}\, A,$$

mert Graph A zárt leneáris altér. Ebből leolvashatjuk, hogy

$$z = A0 = 0,$$

és éppen ezt kellett megmutatnunk. ∎

4.7.3. Állítás. *Legyen A sűrűn értelmezett lineáris operátor. Ekkor A pontosan akkor lezárható, ha $Dom\, A^*$ sűrű, és ekkor $\overline{A} = A^{**}$.*

Bizonyítás ($\Rightarrow$) Legyen $A \subset \overline{A}$ lezárható. Ekkor $\overline{A}^* \subset A^*$, és $\overline{A}^*$ sűrűn értelmezett az előző állítás miatt, így A^* is szükségképpen ilyen.

($\Leftarrow$) Tudjuk, hogy ha létezik A^{**}, akkor $A \subset A^{**}$, és ez egy adjungált operátor, tehát zárt, így ekkor A lezárható. Már csak azt kell belátnunk, hogy ez értelmes. Tudjuk, hogy

$$V[\mathrm{Graph}\, A^*] = (\mathrm{Graph}\, A)^\perp,$$

így

$$\mathrm{Graph}\, A^* = (V[\mathrm{Graph}\, A])^\perp,$$

és

$$\mathrm{Graph}\, A^{**} = (V[\mathrm{Graph}\, A^*])^\perp = (\mathrm{Graph}\, A)^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Graph}\, A} = \mathrm{Graph}\, \overline{A},$$

és ezzel a bizonyítás véget ért, hiszen megkaptuk A^{**} grafikonját. ■

Azt tudjuk, hogy egy szimmetrikus operátor mindig lezárható, hiszen $S \subset S^*$. Ha $T \subset T^*$ az S **szimmetrikus kiterjesztése**, azaz $S \subset T$, akkor

$$S \subset T \subset T^* \subset S^*.$$

A kérdés, hogy lehet–e ezt addig folytatni, hogy egy önadjungált operátort kapjunk, azaz, hogy van–e minden szimmetrikus operátornak önadjungált kiterjesztése. Erre a kérdésre a válasz nem (azt, hogy mikor van, Neumann J. egy tétele mondja meg).

Azt is látjuk, hogy az önadjungált operátor maximális szimmetrikus operátor: nem lehet szimmetrikusan kiterjeszteni, hiszen az operátor kiterjesztéséval az adjungált szűkülne.

4.7.1. Definíció. *Egy S szimmetrikus operátort* **lényegében önadjungált***nak nevezünk, ha $\overline{S}$ önadjungált.*

Ha egy szimmetrikus operátor nem ilyen, lehet egy önadjungált kiterjesztése, egy sem, vagy sok is. Például $P_0 \subset P_\alpha$ az α minden lehetséges értékére, $P_0^* = D \supset P_0$, tehát P szimmetrikus, és kontinuum sok önadjungált kiterjesztése van.

Az, hogy van–e vagy sincsen egy operátornak önadjungált kiterjesztése, már nehezebb kérdés, de azért adunk példát egy olyan operátorra, amelynek nincsen: $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_0^+)$-n legyen

$$\operatorname{Dom} D' := \{\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_0^+) | \varphi \text{ abszolút folytonos}, \varphi(0) = 0, \varphi' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_0^+)\}.$$

Ebből már következik, hogy $\lim\limits_{\infty} \varphi = 0$. Legyen

$$D'\varphi := -i\varphi'.$$

Azt egyszerű parciális integrálással láthatjuk be, hogy D' szimmetrikus operátor, azonban ennek az operátornak nincsen önadjungált kiterjesztése.

Felhívjuk itt a figyelmet arra a fizikában gyakran elkövetett tévedésre, hogy ha A és B önadjungált operátorok, akkor

$$(A+B)^* \supset A^* + B^* = A + B,$$

és az egyenlőség fennállásában csak akkor lehetünk biztosak, hogyha valamelyik korlátos. Az $A+B$ összeg még csak nem is biztos, hogy lényegében önadjungált, ekkor annak is van jelentősége, hogy az önadjungált kiterjesztések közül melyiket választjuk. Egy az alkalmazások szempontjából fontos példa $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$-on a

$$-\frac{\triangle}{2m} + V$$

operátor, ahol $m \in \mathbb{R}$. Ezek az operátorok önadjungáltak, de a kettő összege rendszerint csak szimmetrikus. A fizikában használatos V potenciálok esetén eddig még mindig kimutatták, hogy lényegében önadjungált.

Ugyanakkor a relativisztikus kvantummechanikában ez nem teljesül,

$$V(r) \sim \frac{\alpha a}{r}$$

alakú potenciálok esetén a megfelelő operátor csak kb. 120 alatti a-k esetén lesz lényegében önadjungált. Ebből azt a két következtetést lehet levonni, hogy vagy 120 körül véget ér a periódusos rendszer, vagy ez a leírás nem tökéletes.

4.7.4. Állítás. *Legyen A önadjungált operátor. Ekkor $\operatorname{Dom} A = \mathcal{H}$ pontosan akkor, ha A folytonos.*

Bizonyítás A ($\Leftarrow$) irányú következtetés helyességét már közvetlenül az adjungált definíciója után megmutattuk. A ($\Rightarrow$) irány is triviálisan következik az zárt grafikon tételéből: mivel $A = A^*$, A, mint adjungált operátor, zárt. És a zárt grafikon tétele (2.5.1.) szerint egy zárt halmazon értelmezett zárt operátor szükségképpen folytonos. ■

4.8. A Heisenberg–féle felcserélési reláció

A kvantummechanikában egy szokásos – ámde, mint mindjárt megmutatjuk, nem tökéletes – felépítésében alapfeltevésként szokták elfogadni, hogy a klasszikus mechanikában kanonikusan konjugált változópároknak olyan önadjungált operátorok felelnek meg, amelyekre

$$PQ - QP = i\frac{\hbar}{2}I.$$

A most következő állításban azt mutatjuk meg, hogy ez nem lehetséges. A fentiekben, mivel egyenlőség áll, szükségképpen mind a kettő mindenhol értelmezett, tehát folytonos az előző állítás értelmében (tehát a szokásos választás már nem is lehet jó!).

4.8.1. Állítás. *Ha A és B folytonos lineáris operátorok, $\alpha \in \mathbb{K}$ és $AB - BA = \alpha I$, akkor $\alpha = 0$.*

Bizonyítás Vegyük észre a következőket:

$$A^2B - BA^2 = AAB(-ABA + ABA) - BAA = A(AB - BA) - (AB - BA)A = 2\alpha A,$$

ahol a zárójelben lévő tagot csak azért szúrtuk be, hogy az egyenlőség jobban látszódjon, majd ezután felhasználtuk a felcserélési relációt. Ennek mintájára teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$A^nB - BA^n = n\alpha A^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Ebből látható, hogy két lehetőség van:
– A nilpotens, azaz $\exists n$, hogy $A^n = 0$. Ekkor $A^{n+1} \neq 0$, így α szükségképpen nulla.
– $\forall n$ esetén $A^n \neq 0$. Ekkor

$$n|\alpha|\|A^{n-1}\| \leq 2\|B\|\|A\|\|A^{n-1}\|,$$

így

$$n|\alpha| \leq 2\|B\|\|A\|,$$

amiből

$$|\alpha| \leq \frac{2\|B\|\|A\|}{n} \quad \forall n \Rightarrow \alpha = 0,$$

és ezzel az állításunkat beláttuk. ■

Az természetesen teljesülhet, hogy $PQ - QP \subset \alpha I$, de ekkor meg az értelmezési tartomány lehet nagyon szűk, fel kell még tennünk azt is, hogy sűrűn értelmezettek.

Ugyanakkor még így is kontinuum sok inekvivalens van. Ezen még az sem segít, ha azt is megköveteljük, hogy $P|_D$ és $Q|_D$ lényegében önadjungált legyen.

Ami már ekvivalencia erejéig egyértelműen meghatározza ezeket az operátorokat, az az, ha kirójuk még azt is, hogy $(P^2 = Q^2)\big|_D$ (harmónikus oszcillátor Hamilton–operátora) is lényegében önadjungált legyen, azonban ilyen sok feltevés „gusztustalan" egy elmélet alapjául.

4.9. Erős és gyenge konvergencia

A továbbiakban szükségünk lesz – már csak az alkalmazások szempontjából is – az alábbi definíciókra. Ezekkel tulajdonképpen a normából származón kívül még kétféle **topológiá**t (ld. Gruber: Analízis III.) adunk meg az operátorok terén (a nyílt és a zárt halmazok jellemzésére a sorozatos módszert alkalmazva).

4.9.1. Definíció. *Legyen $A, A_n \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor azt mondjuk, hogy*
– $(u)\lim_n A_n = A$, *azaz A* **az A_n sorozat uniform (egyenletes) harátértéke**, *ha* $\lim_n \|A_n - A\| = 0$.
– $(s)\lim_n A_n = A$, *azaz A* **az A_n sorozat erős harátértéke**, *ha* $\lim_n A_n x = Ax$ $(\forall x)$.
– $(w)\lim_n A_n = A$, *azaz A* **az A_n sorozat gyenge harátértéke**, *ha* $\lim_n \langle y, A_n x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ $(\forall x, y)$.

A következő néhány állításban meg fogjuk mutatni, hogy a gyenge topológia durvább az erős topológiánál és a legfinomabb pedig az uniform, majd vizsgálni fogjuk ezen konvergenciafajták és az eddig megismert műveletek kapcsolatát.

4.9.1. Állítás. *Ha az A_n sorozatnak A egyenletes határértéke, akkor erős határértéke is, azaz $(u)\lim_n A_n = A \Rightarrow (s)\lim_n A_n = A$.*

Bizonyítás $\|(A_n - A)x\| \leq \|A_n - A\|\|x\|$. ■

4.9.2. Állítás. *Ha az A_n sorozatnak A erős határértéke, akkor gyenge határértéke is, azaz $(s)\lim_n A_n = A \Rightarrow (w)\lim_n A_n = A$.*

Bizonyítás $|\langle y, (A_n - A)x\rangle| \leq \|y\|\|(A_n - A)x\|$, a Cauchy–Schwartz–egyenlőtlenség felhasználásával. ■

4.9.3. Állítás. *A lineáris műveletekkel (összeadás, számmal való szorzás) mind a háromféle határérték felcserélhető.*

Bizonyítás a definíció alkalmazásával. ∎

Érdemes megjegyezni a következő –eléggé meglepő– állítást, hiszen az átviteli elvet csak metrikus terekre bizonyítottuk: ebből kiderül, hogy másmilyen konvergencia esetén nem feltétlenül teljesül.

4.9.2. Definíció. *Egy leképezést* **sorozatfolytonos***nak nevezünk, ha tetszőleges, az értelmezési tartományában konvergens sorozat mentén van határértéke.*

Az átviteli elv éppen azt mondja ki, hogy metrikus terek esetén a sorozatfolytonosság és a folytonosság ekvivalens.

4.9.4. Állítás. *Az operátorok szorzása az egyenletes topológiában folytonos, az erős topológiában pedig sorozatfolytonos.*

Bizonyítás (uniform) Az átviteli elv alkalmazásával: azt mutatjuk meg, hogy

$$\lim_n A_n = A \;\; \lim_n B_n = B \Rightarrow \lim_n A_n B_n = AB.$$

$$\|A_nB_n - AB\| \leq \|A_nB_n - AB_n\| + \|AB_n - AB\| \leq \|A_n - A\|\|B_n\| + \|A\|\|B_n - B\|,$$

ugyanakkor tudjuk, hogy $\|B_n\|$ korlátos sorozat, így a következtetés valóban helyes.

(Erős konvergencia) Ismét azt mutatjuk meg, hogy

$$(s)\lim_n A_n = A \;\; (s)\lim_n B_n = B \Rightarrow (s)\lim_n A_n B_n = AB.$$

Legyen $x \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\|A_nB_nx - ABx\| &\leq \|A_nB_nx - A_nBx\| + \|A_nBx - ABx\| \leq \|A_nB_nx - A_nBx\| + \|A_nBx - ABx\| \\ &\leq \|A_n\|\|B_nx - Bx\| + \|A_n(B_x) - A(Bx)\|,\end{aligned}$$

ahol $\|A_n\|$ a Banach–Steinhaus-tétel (2.6.1.. állítás) miatt korlátos. ∎

Adunk példát olyan sorozatokra, amelyek ugyan gyengén korvergensek, a szorzatuk mégsem konvergens még gyengén sem. $A_n := R^n$ (az ℓ^2-beli jobbratolás operátorának n-edik hatványa), $B_n := L^n$ (hasonlóan a balratolással). Ekkor $(w)\lim_n A_n = (w)\lim_n B_n = 0$, ugyanakkor $A_nB_n = I$ n valamennyi értékére.

4.9.5. Állítás. *Az adjungálás az uniform és a gyenge topológiában folytonos, az erős topológiában azonban nem.*

4.10. Feladatok

4.1. Feladat. *Adjunk meg egy nem lezárható operátort! Mi az adjungáltjának az értelmezési tartománya?*

Megoldás Legyen $L \subset \mathcal{H}$ sűrű valódi altér. Ekkor $\exists a \notin L$. Legyen $A : L + \mathbb{K}a \to \mathcal{H}, x + \lambda a \mapsto \lambda a$. Ez az operátor nem lezárható, hiszen ven L-ben futó, a-hoz tartó sorozat. Nézzük meg az adjungáltját: $\mathrm{Dom}\, A^* = \{y \in \mathcal{H} | \langle y| \circ A \text{ folytonos}\}$. Egy ilyen y-t véve a definícióban szereplő leképezés

$$x + \lambda a \mapsto \langle y, (A(x + \lambda a)\rangle = \lambda\langle y, a\rangle.$$

Ismét véve egy L-ben futó a-hoz tartó sorozatot, azt kapjuk, hogy a baloldal határértéke a, a jobboldalé viszont 0. Ez csak akkor egyenlő $\lambda\langle y, a\rangle$-val, ha $y \in \{a\}^{\perp}$, ami tényleg nem sűrű.

4.2. Feladat. *Legyen* $R : \ell^2 \to \ell^2, (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$, *a jobbratolás operátora. Adjuk meg* R *adjungáltját.*

Megoldás R izometrikus operátor, így folytonos, tehát az adjungáltja is mindenütt értelmezett folytonos operátor. Az adjungált megkereséséhez felírjuk, hogy $\langle y, Rx\rangle = \langle R^*y, x\rangle$, majd ezt kifejtjük:

$$0 + y_2^* x_1 + \dots = (Ay)_1^* x_1 + (Ay)_2^* x_2 + \dots,$$

és erről leolvassuk, hogy az adjungált a balratolás operátora:

$$R^* = L : \ell^2 \to \ell^2, (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$$

4.3. Feladat. *Legyen L és R az előző feladatban értelmezett jobbra, ill. balra toló operátor. Vizsgáljuk meg, hogy az R^n $(n \in \mathbb{N})$ és az L^n $(n \in \mathbb{N})$ operátorsorozatok konvergesek–e valamilyen értelemben, és ha igen, akkor mi a határértékük!*

Megoldás Uniform értelemben egyik sem konvergens, hiszen R^n izometrikus, és e_{n+1}-et L^n is e_1-be képezi. Ebből az is következik, hogy a jobbratolás hatványaiból álló sorozat erősen sem konvergens. Ugyanakkor egyszerű számolással az alapvető konvergenciakritérium, ill. a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség segítségével beláthatjuk, hogy $(s)\lim_n L^n = 0$, illetve $(w)\lim_n R^n = 0$.

4.4. Feladat. *Tekintsük az $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ teret. Legyen $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ kis diffeomorfizmus (injektív, és az inverzével együtt folytonosan differenciálható). Legyen $A_F : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N), \varphi \to \varphi \circ F$. Mi ennek az értelmezési tartománya, az adjungáltjának az értelmezési tartománya és az adjungáltja?*

Megoldás Az operátor értelmezési tartománya: $\operatorname{Dom} A_F = \{\varphi | \varphi \circ F \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)\}$. Ez pontosan azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{\varphi \chi_{\operatorname{Ran} F}}{\sqrt{|\det DF(F^{-1})|}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N),$$

hiszen az integrálhelyettesítés alapképlete szerint

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi \circ F| = \int_{\operatorname{Ran} F} |\varphi^2| d\lambda \circ \overset{-1}{F} = \int_{\operatorname{Ran} F} |\varphi^2| \frac{1}{|\det DF(F^{-1})|}.$$

A_F értelmezési tartománya nem mindig sűrű, ilyenkor nincs is adjungáltja. Ha igen, akkor

$$\operatorname{Dom} A_F^* = \left\{ \varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) \,\middle|\, \frac{\varphi \chi_{\operatorname{Ran} F}}{|\det DF|} \circ F^{-1} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) \right\},$$

és

$$A_F^* \varphi = \frac{(\varphi \circ F^{-1}) \chi_{\operatorname{Ran} F}}{|\det DF(F^{-1})|}.$$

Ha A_F^* is sűrűn értelmezett, akkor $A_F^{**} = A_F$.

4.5. Feladat. *Legyen $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$-n Z az a differenciáloperátor, amelynek az értelmezési tartománya $\operatorname{Dom} Z :=$ $\{\varphi | \varphi$ szakaszonként abszolút folytonos, $\varphi' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)\}$, és a hozzárendelési utasítása a differenciáloperátoroknál szokásos $Z\varphi := -i\varphi'$. Mutassuk meg, hogy Z^* csak a nullában értelmezett!*

Megoldás Mivel $D \subset Z$, tudjuk, hogy $Z^* \subset D^* = P_0$, így tudjuk, hogy Z^* is differenciáloperátor. Legyen tehát $\psi \in \operatorname{Dom} Z^*$ és $\varphi \in \operatorname{Dom} Z$. Ekkor tehát az adjungált definíciója szerint $\langle \psi, Z\varphi = \langle Z^*\psi, \varphi\rangle$, azaz

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi^*(-i\varphi') = \int_{-\pi}^{\pi} (-i\psi')^* \varphi.$$

Ugyanakkor ha $a \in [-\pi, \pi]$, akkor φ lehet olyan, hogy csak a-ban van szakadása, sehol máshol, így

$$\sigma := \varphi(a+0) - \varphi(a-0) \neq 0.$$

A jobb oldalon lehet parciálisan integrálni:

$$\psi^*(-i\varphi)\big|_{-\pi}^{a} + \int_{-\pi}^{a} (-i\psi')\varphi + \psi^*(-i\varphi)\big|_{a}^{\pi} + \int_{a}^{\pi} (-i\psi')^* \varphi,$$

és azt kaptuk, hogy a kiintegrált tagok nullát kell, hogy adjanak, mert a többi éppen a bal oldal. Ebből pedig, mivel $\sigma \neq 0$, és a tetszőleges volt, az következik, hogy $\psi = 0$.

4.6. Feladat. *Legyen $(x_n | n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{H}$ teljes ortonormált rendszer, $\lambda_n \in \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$. Terjesszük ki az $x_n \mapsto \lambda_n x_n$ leképezést a lehető legbővebb halmazra, és ezt jelölje A. Mikor lesz ez az operátor folytonos, önadjungált, vagy unitér?*

Megoldás Az $U : \mathcal{H} \to \ell^2, x_n \mapsto e_n$ leképezés izometrikus bijekció, így az A operátor tulajdonságai megegyeznek az UAU^{-1} operátoréval. Ez pedig az $(n \mapsto \lambda_n)$ függvénnyel való szorzás operátora, ami pontosan akkor folytonos, ha a λ_n sorozat korlátos, önadjungált, ha a sorozat valós, és unitér, ha $|\lambda_n| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$.

5. fejezet

Operátorok spektruma

Ebben e fejezetben először belátunk néhány állítást amelyek értelmét, „hasznát" majd csak később látjuk meg. A fejezet további témája a véges dimenziós terek esetén már megismert sajátérték–fogalom általánosítása lesz a végtelen dimenziós esetre.

5.0.1. Állítás. *Legyen A sűrűn értelmezett zárt operátor. Ekkor*
(i) $\mathrm{Ran}(I + A^*A) = \mathcal{H}$
(ii) $\mathrm{Graph}(A|_{\mathrm{Dom}\,A^*A})$ *sűrű* $\mathrm{Graph}\,A$*-ban.*
(iii) $\mathrm{Dom}\,A^*A$ *sűrű.*

Bizonyítás (i) Tudjuk, hogy

$$\mathrm{Graph}\,A^* \oplus V[\mathrm{Graph}\,A] = \mathcal{H} \times \mathcal{H},$$

hiszen egymás ortokomplementerei. $(0, x) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, így

$$\exists|\chi \in \mathrm{Dom}\,A^*, \xi \in \mathrm{Dom}\,A \ : \ (0, x) = (\chi, A^*\chi) + (-A\xi, \xi),$$

(mivel ez utóbbiak egyértelműek, ξ és χ is), így

$$\left.\begin{array}{l} \chi = A\xi \\ x = \xi + A^*\chi \end{array}\right| \Rightarrow A^*\chi = A^*A\xi,$$

így $x = (I + A^*A)\xi$.

(ii) Azt szeretnénk belátni, hogy

$$\overline{\mathrm{Graph}(A|_{\mathrm{Dom}\,A^*A})} = \mathrm{Graph}\,A.$$

Graph A zárt lineáris altér $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$-ban. Legyen $x \in \mathrm{Dom}\,A^*A$, és $u \in \mathrm{Dom}\,A$ Ekkor $(x, Ax) \in \mathrm{Graph}(A|_{\mathrm{Dom}\,A^*A})$, így

$$0 = \langle (u, Au), (x, Ax) \rangle = \langle u, x \rangle + \langle Au, Ax \rangle = \langle u, x \rangle + \langle u, A^*Ax \rangle = \langle u, (I + A^*A)x \rangle,$$

és (i) miatt mialatt x befutja $\mathrm{Dom}\,A^*A$-t, ez befutja $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$-t, így ebből következik, hogy $u = 0$, így $Au = 0$ is teljesül, azaz Graph A-ban a $\mathrm{Graph}(A|_{\mathrm{Dom}\,A^*A})$-ra csak a nulla ortogonális, így ez sűrű benne.

(iii) Ez (ii)-ből következik, mert ha $(x, Ax) \in \mathrm{Graph}\,A$, akkor $\exists x_n$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \in \mathrm{Dom}\,A^*A$, hogy

$$\lim_n (x_n, Ax_n) = (x, Ax),$$

így szükségképpen

$$\lim_n x_n = x,$$

azaz

$$\overline{\mathrm{Dom}\,A^*A} \supset \mathrm{Dom}\,A,$$

és mivel

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Dom}\,A} \subset \overline{\mathrm{Dom}\,A^*A},$$

mert A sűrűn értelmezett, $\mathrm{Dom}\,A^*A$ is sűrű. ∎

5.0.2. Állítás. (Neumann) *Legyen A zárt operátor. Ekkor A^*A önadjungált.*

Bizonyítás Azt tudjuk, hogy $\operatorname{Dom} A^*A$ sűrű, így létezik az adjungáltja. Azt is tudjuk, hogy $I + A^*A$ szűrjekció. Legyen $x \in \operatorname{Dom}(I + A^*A)$! Ekkor

$$\begin{aligned}\|(I + A^*A)x\|^2 = \langle (I + A^*A)x, (I + A^*A)x\rangle &= \|x\|^2 + \langle A^*Ax, x\rangle + \langle x, A^*Ax\rangle + \|A^*Ax\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|Ax\|^2 + \|A^*Ax\|^2 \geq \|x\|^2,\end{aligned}$$

így látjuk, hogy $I + A^*A$ injektív is, és az inverze mindenhol értelmezett, mert szűrjekció. Az elejét a végével összeolvasva látható, hogy

$$\|(I + A^*A)^{-1}y\|^2 \leq \|y\|^2 \quad \forall y \in \mathcal{H},$$

azaz az inverz folytonos is.

Most megmutatjuk, hogy $(I + A^*A)^{-1}$ önadjungált:

$$\langle z, (I + A^*A)^{-1}y\rangle = \langle (I + A^*A)^{-1}z, y\rangle$$

elég, mert folytonos, így mindenhol értelmezett. Mivel $(I + A^*A)$ szűrjekció, létezik x és u, hogy

$$\begin{aligned}y &= (I + A^*A)x \\ z &= (I + A^*A)u,\end{aligned}$$

így a baloldal:

$$\langle (I + A^*A)u, x\rangle = \langle u, x\rangle + \langle A^*Au, x\rangle = \langle u, x\rangle + \langle Au, Ax\rangle,$$

míg a jobb oldal:

$$\langle u, (I + A^*A)x\rangle = \langle u, x\rangle + \langle u, A^*Ax\rangle = \langle u, x\rangle + \langle Au, Ax\rangle,$$

mivel $u \in \operatorname{Dom} A^*A \subset \operatorname{Dom} A$. A két oldalon ugyanazt kaptuk, így az egyenlőség teljesül, azaz $(I + A^*A)^{-1}$ korlátos önadjungált operátor. Tudjuk, hogy az inverzképzés és az adjungálás felcserélhető, azaz

$$\left((I + A^*A)^{-1}\right)^* = \left((I + A^*A)^*\right)^{-1},$$

így $I + A^*A$ is önadjungált kell legyen (az nem biztos, hogy korlátos!)

$$(I + A^*A)^* = I + A^*A,$$

és mivel

$$A^*A = (I + A^*A) - I,$$

ezért

$$(A^*A)^* = ((I + A^*A) - I)^* = (I + A^*A)^* - I^* = I + A^*A - I = A^*A,$$

és ezzel az állítást beláttuk. ∎

5.1. Normális operátorok

5.1.1. Definíció. *Egy N sűrűn értelmezett zárt operátort* **normális***nak nevezünk, ha az adjungáltjával felcserélhető, azaz $N^*N = NN^*$.*

Triviálisan belátható, hogy az eddigiek közül az önadjungált és az unitér operátorok normálisak. A következő állításokban megismerkedünk a normális operátorok néhány „kellemes” tulajdonságával.

5.1.1. Állítás. *Ha N normális operátor, akkor $\operatorname{Dom} N^* = \operatorname{Dom} N$ és $\|N^*x\| = \|Nx\|$ $\forall x \in \operatorname{Dom} N$ esetén.*

Bizonyítás Legyen $y \in \operatorname{Dom} N^*N = \operatorname{Dom} NN^*$! Ekkor

$$\|Ny\|^2 = \langle Ny, Ny\rangle = \langle y, N^*Ny\rangle = \langle y, NN^*y\rangle = \langle N^*y, N^*y = \|N^*y\|^2,$$

és ezen kívül még tudjuk, hogy ha $x \in \operatorname{Dom} N$, akkor $\exists y_n \in \operatorname{Dom} N^*N$ $(n \in \mathbb{N})$ úgy, hogy $\lim_n (y_n, Ny_n) = (x, Nx)$, hiszen $N|_{\operatorname{Dom} N^*N}$ grafikonja sűrű N grafikonjában. Ilyenkor persze

$$\lim_n y_n = x. \tag{*}$$

Mivel $\lim_n Ny_n = Nx$ konvergens sorozat, tehát Cauchy–féle:

$$\|Ny_n - Ny_m\| = \|N(y_n - y_m)\| = \|N^*y_n - N^*y_m\|,$$

ami elég nagy n-re és m-re tetszőlegesen kicsi lehet, ebből következően N^*y_n is Cauchy–sorozat, így a Hilbert–tér teljessége miatt konvergens is:

$$\exists \lim_n N^*y_n =: z \qquad (**)$$

A (*) és a (**) egyenleteket összeolvasva y_n NN^* értelmezési tartományában futó (tehát N^*-éban is) konvergens sorozat, amely mentén N^*-nak van határértéke. N^*, mint adjungált operátor, zárt, így

$$x \in \operatorname{Dom} N^* \text{ és } N^*x = z.$$

Mivel N zárt operátor, $N^{**} = N$, ugyanerre alkalmazva a fenti gondolatmenetet, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{Dom} N^* \subset \operatorname{Dom} N^*N = \operatorname{Dom} N,$$

és ezzel bebizonyítottuk az értelmezési tartományok egyenlőségét. Az

$$\|Nx\| = \|N^*x\|$$

egyenlőség hasonlóan egy $NN^* = N^*N$ értelmezési tartományában futó sorozat segítségével bizonyítható. ■

5.2. Sajátértékek, spektrum

A véges dimenziós vektorterek elméletében megtanultuk, hogy egy komplex téren egy operátornak biztosan van sajátértéke (ott ez az algebra alaptételének egyszerű következménye volt). Végtelen dimenzióban ez nem igaz, erre példát is adunk: $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$-n M_{id} korlátos önadjungált operátor (a szimmetrikusaknak még valós véges dimenziós esetben is volt sajátértéke!). Ha felírjuk a sajátértékegyenletet:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\varphi &= \lambda\varphi \\ x\varphi(x) &= \lambda\varphi(x), \end{aligned}$$

akkor láthatjuk, hogy ennek csak a majdnem mindenütt nulla függvény a megoldása.

Emlékeztetünk a sajátérték és a sajátaltér definíciójára:

5.2.1. Definíció. *A $\lambda \in \mathbb{K}$ számot az A operátor* **sajátértéké***nek nevezzük, ha $\exists x \neq 0 \in \mathcal{H}$, hogy $Ax = \lambda x$. Ekkor az*

$$S_\lambda := \{x \in \mathcal{H} | Ax = \lambda x\}$$

halmazt **az A operátor λ sajátértékéhez tartozó sajátalteré***nek nevezzük*

Az

$$\mathit{Eig}\, A := \{\lambda \in \mathbb{K} | \lambda \text{ sajátértéke } A\text{-nak}\}$$

halmazt pedig A **sajátértékeinek halmazá***nak nevezzük.*

Azt rögtön látjuk, hogy λ pontosan akkor sajátértéke A-nak, ha $A - \lambda I$ nem injektív. Ugyanakkor végtelen dimenziós esetben az inverznek sok más „kellemetlen” tulajdonsága lehet, ezért szükséges a következő definíció:

5.2.2. Definíció. *A $\lambda \in \mathbb{K}$ számot az A operátor* **reguláris értéké***nek nevezzük, ha*
(i) $A - \lambda I$ injektív
(ii) $\operatorname{Dom}(A - \lambda I)^{-1}$ sűrű
(iii) $(A - \lambda I)^{-1}$ folytonos.
Az ilyen számok halmazát,

$$\mathit{Reg}\, A := \{\lambda \in \mathbb{K} | \lambda \text{ reguláris értéke } A\text{-nak}\}$$

A **reguláris értékeinek halmazá***nak nevezzük. A*

$$\mathit{Sp}\, A := (\mathit{Reg}\, A)^{\flat}$$

halmazt pedig A **spektrumá***nak.*

		$A-\lambda I$ injektív		$A-\lambda I$
$\mathrm{Ran}(A-\lambda I)$		$(A-\lambda I)^{-1}$ folytonos	$(A-\lambda I)^{-1}$ nem folytonos	nem injektív
sűrű	zárt	—	$\mathrm{Sp}_c\,A$	
	nem zárt	—	folytonos spektrum	$\mathrm{Eig}\,A$
nem	zárt	$\mathrm{Sp}_{r1}\,A$	$\mathrm{Sp}_{r2}\,A$	sajátértékek
sűrű	nem zárt	első maradékspektrum	második maradékspektrum	

5.1. táblázat. A spektrumpontok osztályozása

		$A-\lambda I$ injektív		$A-\lambda I$
$\mathrm{Ran}(A-\lambda I)$		$(A-\lambda I)^{-1}$ folytonos	$(A-\lambda I)^{-1}$ nem folytonos	nem injektív
sűrű	zárt	—	—	
	nem zárt	—	$\mathrm{Sp}_c\,A$	$\mathrm{Eig}\,A$
nem	zárt	$\mathrm{Sp}_{r1}\,A$	—	sajátértékek
sűrű	nem zárt	—	$\mathrm{Sp}_{r2}\,A$	

5.2. táblázat. Zárt operátorok spektruma

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{Eig}\,A \subset \mathrm{Sp}\,A.$$

A spektrumpontok osztályozását az 5.1. táblázatban láthatjuk.

5.2.1. Állítás. *Zárt operátor sajátalterei zártak.*

Bizonyítás Minden sajátaltér egy megfelelő operátor magja:

$$S_\lambda = \mathrm{Ker}(A-\lambda I),$$

ahol ez az operátor egy zárt és egy folytonos operátor különbsége. Ebből már következik, hogy a magja zárt.■

Mivel egy zárt operátor esetén, ha $A-\lambda I$ injektív, akkor az inverze – az előbbi bizonyításban mondottak alapján – zárt, így egy zárt operátor spektruma az 5.2. táblázatnak megfelelő.

5.3. A rezolvens

A következőkben szükségünk lesz egy régebbi tételünk (a Neumann–sor) élesítésére:

5.3.1. Állítás. *Legyen A injektív operátor, úgy hogy A^{-1} sűrűn értelmezett folytonos operátor. Ekkor ha H olyan folytonos lineáris operátor, hogy*

$$\|H\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

akkor $A-H$ is injektív, és az inverze sűrűn értelmezett, folytonos.

Bizonyítás Mivel A^{-1} sűrűn értelmezett folytonos operátor, létezik $\overline{A^{-1}}$, és ez mindenütt értelmezett folytonos operátor, így

$$\|H\overline{A^{-1}}\| \le \|H\|\|\overline{A^{-1}}\| = \|H\|\|A^{-1}\| < 1,$$

így a Neumann-sor szerint $I - H\overline{A^{-1}}$ invertálható, és

$$\left(I - H\overline{A^{-1}}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (H\overline{A^{-1}})^n.$$

Mivel

$$A - H = (I - HA^{-1})A = (I - H\overline{A^{-1}})A$$

és mind A mind – a fentiek miatt – $(I - H\overline{A^{-1}})$ injektív, $A - H$ is injektív. (Az egyenlőség azért áll fenn, mert itt A^{-1}-nek úgyis csak $\operatorname{Ran} A$-n kell hatnia.)

$$\operatorname{Ran}(A - H) = (I - H\overline{A^{-1}}) \operatorname{Ran} A,$$

és $\operatorname{Ran} A$ sűrű, $I - H\overline{A^{-1}}$ pedig folytonos lineáris bijekció, és az inverze is, így sűrű halmazt sűrű halmazba képez.

Még meg kell mutatnunk, hogy az inverz folytonos:

$$(A - H)^{-1} = A^{-1}(I - HA^{-1})^{-1},$$

azaz felírható két folytonos leképezés kompozíciójaként, így szükségképpen folytonos. ■

Ennek az állításnak egyszerű következménye a következő:

5.3.2. Állítás. *Tetszőleges operátor spektruma zárt.*

Legyen a vizsgált operátor A. Az $\operatorname{Sp} A = \mathbb{K}$ esetet kizárhatjuk, hiszen ekkor az állítás triviális. A következőkben azt az esetet vizsgáljuk, amikor $\operatorname{Sp} A \neq \mathbb{K}$. Legyen ekkor $\lambda \in \operatorname{Reg} A$! Ez esetben $A - \lambda I$ injektív, az inverze sűrűn értelmezett és folytonos. Legyen

$$\alpha \in \mathbb{K} \quad |\alpha| < \frac{1}{\|(A - \lambda I)^{-1}\|}!$$

Ekkor az előző tételt alkalmazva $A - \lambda I - \alpha I$ injektív, az inverze sűrűn értelmezett és folytonos, azaz

$$\alpha + \lambda \in \operatorname{Reg} A,$$

így beláttuk, hogy λ körül van egy $1/\|(A - \lambda I)^{-1}\|$ sugarú gömb A reguláris értékeinek halmazában, azaz $\operatorname{Reg} A$ nyílt, ebből következően

$$\operatorname{Sp} A = (\operatorname{Reg} A)^{\flat}$$

zárt. ■

5.3.1. Definíció. *Legyen A lineáris operátor. Ekkor a*

$$\mathbb{K} \setminus Sp\, A \to \mathcal{L}in\mathcal{H} \quad \lambda \mapsto (A - \lambda I)^{-1} =: R_A(\lambda)$$

leképezést **az A operátor rezolvensé***nek nevezzük.*

5.3.3. Állítás. *Zárt operátorok rezolvense analítikus függvény. (Azaz, ha A zárt, akkor $R_A : \mathbb{K} \setminus Sp\, A \to \mathcal{L}in\mathcal{H}$ analítikus).*

Bizonyítás Tudjuk, hogy ha A zárt, és $\lambda \notin \operatorname{Sp} A$, akkor $(A - \lambda I)$ zárt, folytonos és sűrűn értelmezett, ebből következően mindenhol értelmezett, így már csak azt kell megmutatnunk, hogy a rezolvens analítikus. Legyen $\lambda \in \operatorname{Reg} A$ és

$$\alpha \in \mathbb{K} \quad |\alpha| < \frac{1}{\|(A - \lambda I)^{-1}\|}!$$

Ekkor

$$R_A(\lambda + \alpha) = (A - (\lambda + \alpha)I)^{-1} = \left(I - \alpha(A - \lambda I)^{-1}\right)^{-1}(A - \lambda I)^{-1} = (I - \alpha R_A(\lambda))^{-1} R_A(\lambda).$$

Az első tagot felírhatjuk Neumann–sor alakjában

$$(I - \alpha R_A(\lambda))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n R_A^n(\lambda),$$

így λ körül R_A az α szerinti hatványsor alakjába írható, ezzel az analítikusságot beláttuk.

Az n-edik derivált

$$R_A^{(n)}(\lambda) = R_A^{n+1}(\lambda) n!,$$

speciálisan

$$R'_A(\lambda) = R_A^2(\lambda),$$

és a bizonyítást befejeztük. ■

5.3.4. Állítás. *Legyen A mindenütt értelmezett folytonos lineáris operátor. Ekkor $Sp\,A \subset \overline{G_{\|A\|}(0)}$.*

Bizonyítás Azt kell megmutatnunk, hogy ha $|\lambda| > \|A\|$, akkor λ reguláris érték. Ilyenkor

$$\left\|\frac{A}{\lambda}\right\| < 1,$$

így $I - \dfrac{A}{\lambda}$ invertálható (Neumann–sor, ld. Gruber: Analízis III.), emiatt $\dfrac{1}{\lambda}(\lambda I - A)$ is invertálható, így $A - \lambda I$ is. ■

Véges dimenziós esetben fontos állítás volt, hogy egy komplex téren értelmezett lineáris operátornak van sajátértéke (ld. Matolcsi: Analízis II.). Ezt az állítást az algebra alaptétele (ld. Matolcsi: Analízis I., VI.) segítségével láttuk be. Az ottani bizonyítást most nem alkalmazhatjuk, viszont a spektrumra beláthatunk egy hasonló állítást, az algebra alaptételének a bizonyításához hasonlóan.

5.3.5. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert–tér és $A \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$. Ekkor $Sp\,A \neq \emptyset$*

Bizonyítás A rezolvens definíciója szerint, és a Neumann–sor felhasználásával

$$R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1} = \left(\left(\frac{A}{\lambda} - I\right)\lambda\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{A}{\lambda} - I\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-A}{\lambda}\right)^{n}.$$

Ebből leolvasható, hogy

$$\lim_{\lambda\to\infty} R_A(\lambda) = 0,$$

így ha A spektruma üres volna, akkor a rezolvense az egész komplex síkon értelmezett korlátos analítikus függvény lenne, amely Liouville tétele (ld. Matolcsi: Analízis VI.) szerint csak konstans lehet. Ugyanakkor

$$R'_A(\lambda) = R_A^2(\lambda)$$

ami miatt ha konstans, akkor csak a nulla lehetne, így viszont ellentmondásra jutottunk azzal, hogy $R_A(\lambda)$ invertálható. ■

5.4. Operátorok adjungáltjának spektruma

Az eddigi állításokban sehol nem használtuk ki, hogy Hilbert–terek operátoraival foglalkozunk, és nem csak Banach–terek operátoraival (így az eddigi tételek Banach–tér esetén is érvényesek), most azonban olyan állításokat fogunk belátni, melyek csak skalárszorzatos téren érvényesek, akkor viszont jelentősen megkönnyíthetik egy–egy operátor spektrumának a kiszámítását.

5.4.1. Állítás. *Ha A sűrűn értelmezett zárt operátor, akkor $Sp\,A^* = (Sp\,A)^*$.*

Bizonyítás Legyen $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,A$. (Ekkor persze $\lambda^* \notin (\mathrm{Sp}\,A)^*$.) Ilyenkor $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$. Az adjungált definíciója után mondottak szerint ekkor $\left((A - \lambda I)^{-1}\right)^* \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$, ugyanakkor

$$\left((A - \lambda I)^{-1}\right)^* = ((A - \lambda I)^*)^{-1} = (A^* - \lambda^* I)^{-1},$$

így

$$\lambda^* \notin \mathrm{Sp}\,A^*.$$

Fordítva, ha $\lambda^* \notin \mathrm{Sp}\,A^*$, akkor ugyanezzel a gondolatmenettel

$$\lambda = \lambda^{**} \notin \mathrm{Sp}\,A^{**} = \mathrm{Sp}\,A,$$

A zárt volta miatt. ■

Fontos megjegyezni, hogy még sűrűn értelmezett zárt operátor esetén sem feltétlenül igaz ugyanez a sajátértékekre:

$$(\mathrm{Eig}\,A)^* \neq \mathrm{Eig}\,A.$$

A fenti tételt igen gyakran felhasználhatjuk operátotok spektrumának a megkeresésére: néha az adjungált spektrumát sokkal könnyebb megtalálni.

5.4.2. Állítás. *Ha* $Eig\,A^* \subset (Eig\,A)^*$*, akkor* $Sp_{r1}\,A = Sp_{r2}\,A = \emptyset$.

Bizonyítás Legyen $\lambda^* \notin (\mathrm{Eig}\,A)^*$. Ekkor ebből következően $\lambda^* \notin \mathrm{Eig}\,A^*$, azaz $A^* - \lambda^* I$ injektív, az inverze $(A^* - \lambda^*)^{-1}$.

$$\mathrm{Ker}(A^* - \lambda^* I) = \{0\},$$

és ismert, hogy

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^* = \mathrm{Ran}(A - \lambda I)^{\perp},$$

így $\mathrm{Ran}(A - \lambda I)$ sűrű, a maradékspektrumok üresek. ■

5.4.3. Állítás. *Ha* N *normális operátor, akkor* $Eig\,N^* = (Eig\,N)^*$.

Bizonyítás Legyen $\lambda \in \mathrm{Eig}\,N$, azaz $\mathrm{Ker}(N - \lambda I) \neq \{0\}$. Ha N normális, akkor $N - \lambda I$ is az, így az 5.1.1.. állítás felhasználásával

$$\mathrm{Ker}(N - \lambda I) = \mathrm{Ker}(N - \lambda I)^* = \mathrm{Ker}(N^* - \lambda^* I) \Rightarrow \lambda^* \in \mathrm{Eig}\,N^*.$$

A másik irányú következtetést ugyanígy bizonyíthatjuk, hiszen lévén N zárt operátor $N = N^{**}$. ■

Következmény Mivel N normális operátor, zárt is, ezért a spektrumára az 5.2. táblázat vonatkozik. Az állítás egyszerű következménye, hogy ekkor a sajátértékeken kívük csak a $\mathrm{Sp}_c\,A$ halmaz lehet nem üres, hiszen a maradékspektrumok az előző állítás szerint üresek.

5.4.4. Állítás. *Ha a* V *operátor izometrikus, akkor* $Eig\,V \subset \mathbb{S}^1$.

Bizonyítás Ha x sajátértéke V-nek λ sajátértékkel, azaz $Vx = \lambda x$, akkor

$$\|x\|^2 = \|Vx\|^2 = |\lambda|^2 \|x\|^2 \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1. \blacksquare$$

5.4.5. Állítás. *Ha* T *szimetrikus operátor, akkor* $Eig\,T \subset \mathbb{R}$

Bizonyítás Legyen $Tx = \lambda x$. Ekkor a szimmetrikus operátorokról elmondottak értelmében

$$\langle Tx, x\rangle = \langle T^* x, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \lambda \|x\|^2,$$

ugyanakkor

$$\langle Tx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda^* \|x\|^2,$$

így a kettőt összvetve

$$\lambda^* \|x\|^2 = \lambda \|x\|^2 \Rightarrow \lambda^* = \lambda,$$

tehát λ valóban valós. ■

Következmény Vegyük észre a következő trivialitást: ha T szimmetrikus operátor, azaz $T \subset T^*$, akkor

$$\mathrm{Eig}\,T = (\mathrm{Eig}\,T)^* \subset \mathrm{Eig}\,T^*,$$

hiszen T sajátvektorain T és T^* ugyanazt az értéket veszi fel.

5.4.6. Állítás. *Normális, izometrikus és szimmetrikus operátorok különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterei ortogonálisak egymásra.*

Bizonyítás (Normális) Legyen N normális operátor, $Nx = \lambda x$ és $Ny = \mu y$ $(\lambda \neq \mu)$. Ekkor

$$\mu\langle y, x\rangle = \langle \mu^* y, x\rangle = \langle N^* y, x\rangle = \langle y, Nx\rangle = \lambda\langle y, x\rangle$$

(hogy az adjungált sajátvektora is ugyanaz, nem csak a sajétérték a konjugált, ld. az 5.4.3.. állítás bizonyítását!) Ha $\lambda \neq \mu$, akkor a fenti egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha

$$\langle y, x\rangle = 0$$

(Izometrikus) Legyen V izometrikus operátor, $Vx = \lambda x$ és $Vy = \mu y$ $(\lambda \neq \mu)$. Ekkor

$$\langle y, x\rangle = \langle Vy, Vx\rangle = \langle Vy, \lambda x\rangle = \langle \mu y, \lambda x\rangle = \mu^* \lambda \langle y, x\rangle.$$

Azt tudjuk, hogy $|\lambda| = |\mu|$, így ha $\lambda \neq \mu$, akkor $\mu^*\lambda \neq 1$, így a fenti egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

(Szimmetrikus) Legyen T szimmetrikus operátor, $Tx = \lambda x$ és $Ty = \mu y$ ($\lambda \neq \mu$). Ekkor az 5.4.5.. állítás szerint λ és μ valós, így:

$$\langle y, Tx\rangle = \langle T^* y, x\rangle = \langle Ty, x\rangle = \mu\langle y, x\rangle$$

és

$$\langle y, Tx\rangle = \langle y, \lambda x\rangle = \lambda\langle y, x\rangle,$$

ami szintén csak úgy lehetséges, mivel $\mu \neq \lambda$, ha

$$\langle y, x\rangle = 0,$$

és ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

5.4.7. Állítás. *Ha U unitér operátor, akkor $Sp\,U \subset \mathbb{S}^1$.*

Bizonyítás Az 5.3.4.. állítás szerint, mivel $\|U\| = 1$, ha $|\lambda| > 1$, akkor $\lambda \in \operatorname{Reg} A$. Ehhez elég, ha az operátor izometrikus.

Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy $0 \notin \operatorname{Sp} U$, mert $U - 0I = U$ inverze szintén sűrűn értelmezett és unitér, így folytonos. Ekkor a nulla körüli

$$r := \frac{1}{\|U^{-1}\|} = 1$$

sugarú nyílt körlap elemeiről a Rezolvens c. szakasz elején mondottak alapján tudjuk, hogy szintén reguláris értékek (ld. az 5.3.2.. állítás bizonyítását). ■

5.4.8. Állítás. *Legyen S önadjungált operátor. Ekkor $Sp\,S \subset \mathbb{R}$.*

Bizonyítás Legyen $\lambda = \alpha + i\beta$, ahol $\beta \neq 0$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Meg fogjuk mutatni, hogy ekkor $\lambda \notin \operatorname{Sp} S$. Azt az 5.4.5.. állítás szerint tudjuk, hogy $\lambda \notin \operatorname{Eig} S$.

$$\begin{aligned}\|(S-\lambda I)x\|^2 &= \langle (S-\alpha I)x - i\beta x, (S-\alpha I)x - i\beta x \\ &= \|(S-\alpha I)x\|^2 + i\langle \beta x, (S-\alpha I)x\rangle - i\langle (S-\alpha I)x, \beta x\rangle + |\beta|^2\|x\|^2 \\ &\geq |\beta|^2\|x\|^2\end{aligned}$$

(A képzetes tagok éppen kiesnek.) A fentiek szerint $S - \lambda I$ injektív, eszerint az inverze folytonos is, már csak azt kell megmutatnunk, hogy sűrűn értelmezett. Ezt lásd az 5.4.3.. állítás következményében. Ezek szerint tehát $\lambda \notin \operatorname{Sp} S$. ■

Az, hogy λ sajátértéke A-nak, azt jelenti, hogy $A - \lambda I$ nem injektív. A spektrumpont már kevésbé „kézzelfogható". A spektrumpontok egy részét teszi szemléletesebbé – és könnyebben megkereshetővé – a következő fogalom:

5.4.1. Definíció. *A $\lambda \in \mathbb{K}$ számot* **az A operátor általánosított sajátértéké***nek nevezzük, ha $\exists x_n \in$ $Dom\,A$ $(n \in \mathbb{N})$, hogy bár $\|x_n\| = 1$, $\lim_n (A - \lambda I)x_n = 0$.*

A definíciót könnyebben alkalmazhatóvá teszi a következő állítás:

5.4.9. Állítás. *$\lambda \in \mathbb{K}$ pontosan akkor általánosított sajátértéke A-nak, ha $\exists k > 0, x_n$ $(n \in \mathbb{N})$, hogy $\|y_n\| \geq$ k $\forall n$, és $\lim_n (A - \lambda I)x_n = 0$.*

Bizonyítás ($\Rightarrow$) $k = 1$ választással triviális. ($\Leftarrow$) Ebben az esetben

$$x_n := \frac{y_n}{\|y_n\|},$$

hiszen ekkor

$$\|(A-\lambda I)x_n\| = \|(A-\lambda I)y_n\|\frac{1}{\|y_n\|} \leq \|(A-\lambda I)y_n\|\frac{1}{k},$$

aminek a határértéke a határérték és a lineáris műveletek viszonya miatt nulla. ■

Most bebizonyítjuk, hogy az általánosított sajátértékek a spektrum elemei:

5.4.10. Állítás. *$\lambda \in \mathbb{K}$ pontosan akkor általánosított sajátértéke az A operátornak ha $(A-\lambda I)^{-1}$ nem folytonos.*

Bizonyítás ($\Rightarrow$) A definíció azzal ekvivalens, hogy

$$\inf_{\|x\|=1} \|(A-\lambda I)x\| = 0,$$

amiből következik, hogy az inverze nem folytonos, hiszen az inverz normájához az

$$\frac{\|(A-\lambda I)^{-1}y\|}{\|y\|}$$

kifejezés szuprémumát kell meghatározni. Ebbe beírva a fenti infimumot megközelítő sorozatot azt kapjuk, hogy

$$\sup \frac{\|(A-\lambda I)^{-1}y\|}{\|y\|} = \sup \frac{\|x\|}{\|(A-\lambda I)x\|} = \frac{1}{\inf \|(A-\lambda I)x\|} = \infty,$$

tehát az inverz nem lehet folytonos.

($\Leftarrow$) Ebben az esetben a fentihez hasonlóan abból, hogy

$$\sup \frac{\|(A-\lambda I)^{-1}y\|}{\|y\|} = \infty$$

kell a fenti infimumra következtetni. ■

5.5. Normális operátorok spektruma

Az alábbi állítást a továbbiakban fogjuk alkalmazni:

5.5.1. Állítás. *Ha N normális operátor, és $Nx_i = \lambda_i x_i$ $(i \in I)$, $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$ akkor $\sum_{i\in I} c_i x_i \in \operatorname{Dom} N$ pontosan akkor, ha $\sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 |c_i|^2 < \infty$, és ekkor*

$$N \sum_i c_i x_i = \sum_i c_i N x_i = \sum_i c_i \lambda_i x_i.$$

Bizonyítás ($\Rightarrow$) Tudjuk, hogy $\sum_i c_i x_i \in \operatorname{Dom} N$. Legyen $F \subset I$ véges. Ekkor

$$\left| \left\langle N \sum_{i\in I} c_i x_i, \sum_{j\in F} c_j \lambda_j x_j \right\rangle \right|^2 \le \left\| N \sum_{i\in I} c_i x_i \right\| \left| \sum_{j\in F} |c_j|^2 |\lambda_j|^2 \right|,$$

hiszen ortonormált rendszer elemeinek lineárkombinációjáról van szó, így egyrészt a Bessel–egyenlőtlenség (3.6.2.. állítás), másrészt a skalárszorzat szokásos becslése (Cauchy–Schwartz–egyenlőtlenség) szerint.

Ugyanakkor

$$\left| \left\langle N \sum_{i\in I} c_i x_i, \sum_{j\in F} c_j \lambda_j x_j \right\rangle \right|^2 = \left| \left\langle \sum_{i\in I} c_i x_i, N^* \sum_{j\in F} c_j \lambda_j x_j \right\rangle \right|^2 = \left| \sum_{i\in I} \left\langle c_i x_i, N^* \sum_{j\in F} c_j \lambda_j x_j \right\rangle \right|^2$$
$$= \left| \sum_{i\in I} \left\langle N c_i x_i, \sum_{j\in F} c_j \lambda_j x_j \right\rangle \right|^2 = \left| \sum_{i\in I} \left\langle \lambda_i c_i x_i, \sum_{j\in F} c_j \lambda_j x_j \right\rangle \right|^2 = \left| \sum_{j\in F} |c_j|^2 |\lambda_j|^2 \right|^2,$$

amit az előző egyenlőtlenséggel összevetve kapunk, hogy

$$\sum_{j\in F} |c_j|^2 |\lambda_j|^2 \le \left\| N \sum_i c_i x_i \right\|,$$

amiből az általánosított sorok konvergenciájának definíciója szerint következik, hogy az állítás szerinti összeg valóban konvergens.

($\Leftarrow$) Most azt tudjuk, hogy $\exists \sum_{i\in I} c_i\lambda_i x_i$, és $\left\langle \sum_{i\in I} c_i x_i \right| \circ N^*$ folytonosságát kell megmutatnunk (N zárt operátor, így $N^{**} = N$).

$$\left\langle \sum_{i\in I} c_i x_i, N^* x \right\rangle = \sum_{i\in I} \langle c_i x_i, N^* x\rangle = \sum_{i\in I} \langle c_i\lambda_i x_i, x\rangle = \left\langle \sum_{i\in I} c_i\lambda_i x_i, x \right\rangle,$$

ahol az utolsó egyenlőségben felhasználtuk, hogy az állítás feltevései szerint a végén skalárszorzatban a bal oldalon álló összeg létezik. Ez a leképezés x-nek egy másik vektorral való skalárszorzata, így szükségképpen folytonos. ■

5.5.2. Állítás. *Ha N normális operátor, és sajátalterei kifeszítik $\mathcal{H}$-t, akkor a spektruma a sajátértékei halmazának a lezártja ($\mathrm{Sp}\, N = \overline{\mathrm{Eig}\, N}$).*

Bizonyítás ($\supset$) triviális, hiszen $\mathrm{Eig}\, N \subset \mathrm{Sp}\, N$, és a spektrum az 5.3.2.. állítás szerint zárt halmaz.

($\subset$) Legyen $\lambda \notin \overline{\mathrm{Eig}\, N}$. Azt fogjuk megmutatni, hogy ekkor $\lambda \in \mathrm{Reg}\, N$. Mivel N sajátalterei kifeszítik $\mathcal{H}$-t, annak valamennyi eleme az 5.5.1.. állítás feltételeinek megfelelően $x = \sum_i c_i x_i$ alakba írható, ahol $N x_i = \lambda_i x_i$, és az x_i vektorok páronként ortogonálisak és egyre normáltak. Ekkor

$$(N - \lambda I)x = (N - \lambda I)\sum_i c_i x_i = \sum_i c_i(\lambda_i - \lambda)x_i,$$

így

$$\|(N - \lambda_i)x\|^2 = \left\| \sum_i c_i(\lambda_i - \lambda)x_i \right\| = \sum_i |c_i|^2 |\lambda_i - \lambda|^2,$$

a Parseval–egyenlőség (ld. a 3.6.3.. állítást) szerint, mivel az x_i vektorok teljes ortonormált rendszert alkotnak.

Ha $\lambda \notin \overline{\mathrm{Eig}\, N}$, akkor van körülötte egy gömb $(\mathrm{Eig}\, N)^{\complement}$-ében, azaz

$$\exists r > 0 \quad |\lambda_i - \lambda| > r \quad \forall i,$$

így az előzőek szerint

$$\|(N - \lambda I)x\|^2 \geq r^2 \sum_i |c_i|^2 = r^2\|x\|^2,$$

így $(N - \lambda I)$ injektív, az inverze folytonos, és azt pedig tudjuk, hogy normális operátoroknál az 5.4.3.. következmény szerint (a maradékspektrumok üresek) az értelmezési tartománya is sűrű, így $\lambda \notin \mathrm{Sp}\, N$. ■

5.6. Néhány konkrét operátor spektruma

Először vegyük $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ differenciáloperátorait:

5.6.1. Állítás. *A D differenciáloperátor esetén $\mathrm{Eig}\, D = \mathrm{Sp}\, D = \mathbb{C}$, Ugyanakkor a P differenciáloperátorra $\mathrm{Eig}\, P = \emptyset$ és $\mathrm{Sp}\, P = \mathbb{C}$.*

Bizonyítás Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$, és írjuk fel a sajátértékegyenletet:

$$D\varphi = \lambda\varphi \qquad -i\varphi' = \lambda\varphi' \Rightarrow \varphi = C\exp^{i\lambda}$$

a sajátértékegyenletet minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re meg lehet oldani, a spektrum sem lehet ennél bővebb.

P_0 esetén a sajátértékegyenlet formális megoldásai ugyanezek a függvények, de a

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0$$

peremfeltételt ezek közül az egyik sem elégíti ki. Ugyanakkor $P_0 = D^*$, így a spektruma D spektrumának a komplex konjugáltjával egyezik meg az 5.4.1.. állítás szerint, ami szintén az egész komplex sík. ■

5.6.2. Állítás. *Legyen $\alpha \in \mathbb{S}^1$. Ekkor $\alpha = e^{i\beta}$ $\beta \in [-\pi, \pi]$ alakba írható, és $\mathrm{Eig}\, P_\alpha = \mathrm{Sp}\, P_\alpha = \mathbb{Z} - \dfrac{\beta}{2\pi}$.*

Bizonyítás Ismét felírjuk a sajátértékegyenletet:

$$P_\alpha \varphi = \lambda\varphi \qquad -i\varphi' = \lambda\varphi' \Rightarrow \varphi = C\exp^{i\lambda},$$

és a fenti alakú sajátértékek esetén valóban ki is elégítik a sajátértékegyenletet, így a sajátvektorok

$$\exp^{i\left(n-\frac{\beta}{2\pi}\right)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

alakúak. Ezek a normájukkal leosztva az $\frac{1}{2\pi}\exp^{in}$ teljes ortonormált rendszer tagjai egységnyi abszolútértékű függvénnyel megszorozva, így a 3.8.3.. állítás szerint maguk is teljes ortonormált rendszert alkotnak, így az 5.5.2.. állítás szerint a P_α operátor spektruma megegyezik a sajátértékei halmazának a lezártjával, ugyanakkor $\operatorname{Eig} P_\alpha$ zárt halmaz, így a lezártja önmaga. ∎

A következő állításban megvizsgáljuk az $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ téren értelmezett P differenciáloperátort. Ez az operátor az alkalmazások szempontjából rendkívül fontos: a nemrelativisztikus kvantummechanikában ezt szokták az impulzus operátorának választani.

5.6.3. Állítás. *A P operátornak nincsen sajátértéke, és a spektruma az egész valós egyenes: $\operatorname{Eig} P = \emptyset$, $\operatorname{Sp} P = \mathbb{R}$.*

Bizonyítás Írjuk fel ismét a sajátértékegyenletet:

$$D\varphi = \lambda\varphi \qquad -i\varphi' = \lambda\varphi' \Rightarrow \varphi = C\exp^{i\lambda},$$

azonban ennek az egyenletnek a formális megoldásai nem négyzetesen integrálhatóak, így nem lehetnek sajátfüggvények. Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathbb{R}$ elemei általánosított sajátértékek. Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor tekintsük a

$$\varphi_n(x) := e^{i\lambda x - \frac{|x|}{n}}$$

függvényeket. Mivel

$$|\varphi_n(x)| = e^{-\frac{2|x|}{n}},$$

ezek négyzetesen integrálható függvények. Ha $n \to \infty$, akkor ezek pontonként a fenti exponenciális függvényekhez tartanak, a Hilbert–térben ugyanakkor nincs határértékük.

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n|^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2|x|}{n}}\,dx = 2\int_0^\infty e^{\frac{2x}{n}}\,dx = n,$$

így ezek normája alulról korlátos, ugyanakkor

$$(P-\lambda I)\varphi_n = -i\varphi_n' - \lambda\varphi_n = -i\varphi_n(i\lambda - \frac{\operatorname{sign}}{n}) - \lambda\varphi_n = \frac{i\operatorname{sign}}{n}\varphi_n,$$

így

$$\|(P-\lambda I)\varphi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\varphi_n|^2}{n^2} = \frac{\|\varphi_n\|^2}{n^2} = \frac{1}{n},$$

ami $n \to \infty$ esetén 0-hoz tart, így λ általánosított sajátértéke P-nek, így az összes valós szám P spektrumpontja. $\operatorname{Sp} P$ az 5.4.8.. állítás miatt ennél bővebb viszont nem lehet. ∎

5.7. Szorzásoperátorok spektruma

Emlékeztetünk arra, hogy szorzásoperátorokat az $\mathcal{L}^2_\mu(X)$ tereken értelmeztünk, ahol $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér. Ekkor, ha $f : X \to \mathbb{K}$ mérhető függvény, akkor $M_f : \varphi \mapsto f\varphi$-ről tudjuk, hogy normális operátor.

Továbbá emlékeztetünk arra (ld. Matolcsi: Analízis V.), hogy ilyenkor $\mu \circ \overset{-1}{f}\ \mathcal{B}(\mathbb{K}) \to \overline{\mathbb{R}^+}$ mérték.

Szükségünk lesz még a tartó és az éles pont definíciójára:

$$\operatorname{Sharp}\mu := \{\lambda \in X | \mu(\{\lambda\}) \neq 0\}$$

és

$$\operatorname{Supp}\mu := \{\lambda \in X | \forall G \text{ nyílt}, \lambda \in G, \mu(G) \neq 0\}.$$

Triviálisan adódik (a mérték additivitásának felhasználásával), hogy

$$\operatorname{Sharp}\mu \subset \operatorname{Supp}\mu.$$

Fel fogjuk használni a következő segédtételt:

5.7.1. Állítás. *Ha $E \in \mathcal{A}$, akkor $\mathcal{L}^2_\mu(E) = \{0\}$ pontosan akkor, ha $\mu(E) = 0$.*

Bizonyítás ($\Leftarrow$) triviális, minden E-n értelmezett függvény μ-majdnem mindenütt 0. ($\Rightarrow$) Ha $\mu(E) \neq 0$, akkor a mértéktér σ-végessége miatt $\exists F \subset E$, hogy $F \in \mathcal{A}$, és $0 < \mu(F) < \infty$. Ekkor $0 \neq \chi_F \in \mathcal{L}^2_\mu(E) = 0$. ∎

Ezután már rátérhetünk a szorzásoperátorok spektrumának tárgyalására.

5.7.2. Állítás. *$\operatorname{Eig} M_f = \operatorname{Sharp}(\mu \circ \overset{-1}{f})$, és $S_\lambda = \mathcal{L}^2_\mu(\overset{-1}{f}\{\lambda\})$.*

Bizonyítás Legyen $\lambda \in \operatorname{Sharp}(\mu \circ \overset{-1}{f})$. Ekkor $\mu(\overset{-1}{f}\{\lambda\}) \neq 0$, így a segédtétel szerint $\exists 0 \neq \varphi \in \mathcal{L}^2_\mu(\overset{-1}{f}\{\lambda\})$. Ekkor $\varphi \in \operatorname{Dom} M_f$ és $M_f\varphi = \lambda\varphi \Rightarrow \lambda \in \operatorname{Eig} M_f$, így

$$\operatorname{Sharp}(\mu \circ \overset{-1}{f}) \subset \operatorname{Eig} M_f,$$

és azt is könnyen ellenőrizhetjük, hogy ha ψ $\overset{-1}{f}\{\lambda\}$ -n kívül nem nullamértékű halmazon különbözik a nullától, akkor nem sajátfüggvénye M_f-nek. Ugyanakkor zárt operátor sajátaltere zárt, $\mathcal{L}^2_\mu(\overset{-1}{f}\{\lambda\})$-ben a karakterisztikus függvények sűrű alteret alkotnak, és mind a sajátaltér elemei is, így a sajátaltér szükségképpen az egész $\mathcal{L}^2_\mu(\overset{-1}{f}\{\lambda\})$.

A fordított irányú tartalmazást is könnyen beláthatjuk. Legyen $\lambda \in \operatorname{Eig} M_f$ és φ sajátvektor λ sajátértékkel, azaz $M_f\varphi = \lambda\varphi$. Ekkor

$$M_f\varphi = \lambda\varphi,$$

azaz

$$(f - \lambda)\varphi = 0,$$

tehát $(f(x) - \lambda)\varphi(x) = 0$ μ-majdnem mindenütt. ez a szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így mivel φ nem nulla

$$\varphi \in \mathcal{L}^2_\mu(\overset{-1}{f}\{\lambda\})$$

és

$$\mu(\overset{-1}{f}\{\lambda\}) \neq 0$$

kell hogy teljesüljön, így $\lambda \in \operatorname{Sharp}(\mu \circ \overset{-1}{f})$, és közben megkaptuk a sajátalteret is. ∎

5.7.3. Állítás. *$\operatorname{Sp} M_f = \operatorname{Supp}(\mu \circ \overset{-1}{f})$.*

Bizonyítás ($\subset$) Legyen $\lambda \notin \operatorname{Supp}(\mu \circ \overset{-1}{f})$. Ekkor $\exists r > 0$, hogy $(\mu \circ \overset{-1}{f})(G_r(\lambda)) = 0$, ugyanakkor

$$\overset{-1}{f}(G_r(\lambda)) = \{x \,|\, |f(x) - \lambda| < r\},$$

így

$$\|(M_f - \lambda I)\varphi\|^2 = \|(f - \lambda)\varphi\|^2 = \int_X |f - \lambda|^2 |\varphi|^2 d\mu = \int_{X \setminus \overset{-1}{f}(G_r(\lambda))} |f - \varphi|^2 |\varphi|^2 d\mu \geq r^2 \int_X |\varphi|^2 d\mu,$$

tehát $M_f - \lambda I$ injektív és az inverze folytonos (normális operátor esetén az 5.4.3.. következmény szerint ez elég), így

$$\lambda \in \operatorname{Reg} M_f.$$

($\supset$) Legyen $\lambda \in \operatorname{Supp}(\mu \circ \overset{-1}{f})$! Ekkor

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left(\mu \circ \overset{-1}{f}\right)\left(G_{\frac{1}{n}}(\lambda)\right) \neq 0,$$

így

$$\exists F_n \in \mathcal{A} : F_n \subset \overset{-1}{f}\left(G_{\frac{1}{n}}(\lambda)\right) = \left\{x \,\middle|\, |f(x) - \lambda| < \frac{1}{n}\right\} \quad 0 < \mu(F_n) < \infty,$$

(ahol felhasználtuk, hogy a mértéktér σ-véges.) Megmutatjuk, hogy λ általánosított sajátérték:

$$\varphi_n := \frac{\chi_{F_n}}{\sqrt{\mu(F_n)}} \in \mathcal{L}^2_\mu(X) \quad \|\varphi_n\| = 1.$$

Ekkor

$$\|(M_f - \lambda I)\varphi_n\|^2 = \frac{1}{\mu(F_n)} \int_X |f - \lambda|^2 \chi_{F_n} d\mu \leq \frac{1}{n^2},$$

ami a nullához tart, ha n tart a végtelenbe, így λ általánosított sajátérték, következésképpen $\lambda \in \operatorname{Sp} M_f$. ■

Speciális esetként, kvantummechanikai jelentősége miatt, megvizsgáljuk $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$-en $M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}}$-t, amit a „helykoordináta operátorának" szoktak választani. Ekkor

$$\operatorname{Eig} M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}} = \operatorname{Sharp} \lambda = \emptyset \quad \operatorname{Sp} M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}} = \operatorname{Supp} \lambda = \mathbb{R}.$$

5.8. További megjegyzések a felcserélési relációhoz

Azt szokták mondani, hogy a Heisenberg–féle felcserélési reláció unitér ekvivalencia erejéig meghatározza a hely– és az impulzus operátorát. A reláció szokásos alakja:

$$PQ - QP = -i\frac{\hbar}{2}I.$$

Erről egy korábbi fejezetben már megmutattuk, hogy nem lehetséges. Most megmutatjuk, hogy ha csak azt kötjük ki, hogy

$$PQ - QP \subset -i\frac{\hbar}{2}I$$

legyen, akkor már vannak inekvivalens, a relációt teljesítő operátorok.

Vegyük az $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ teret. Ekkor, ha $\alpha, \beta \in \mathbb{S}^1$, $\alpha \neq \beta$, akkor $\alpha = e^{i\gamma}$, $\beta = e^{i\delta}$, és $\gamma, \delta \in [-\pi, \pi]$. Ez esetben a csererelációt a következő operátorpárok kielégítik:

$$P_\alpha M_{\mathrm{id}} - M_{\mathrm{id}} P_\alpha \subset -i\mathrm{id}$$
$$P_\beta M_{\mathrm{id}} - M_{\mathrm{id}} P_\beta \subset -i\mathrm{id},$$

ugyanakkor nem lehetnek unitér ekvivalensek, hiszen az $A' := UAU^{-1}$ (ahol U unitér) transzformált operátor sajátértékei az eredetiével megegyeznek, viszont P_α és P_β sajátértékei nem egyeznek meg.

Azt is tudjuk, hogy $\operatorname{Dom}(P_\alpha M_{\mathrm{id}} - M_{\mathrm{id}} P_\alpha)$, ill. $\operatorname{Dom}(P_\beta M_{\mathrm{id}} - M_{\mathrm{id}} P_\beta)$ sűrű (a kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvények benne vannak).

Az viszont igaz, hogy nincs olyan $\mathcal{D}$ sűrű lineáris altér, hogy $P_\alpha|_\mathcal{D}$ lényegében önadjungált volna, $\overline{P_\alpha|_\mathcal{D}} \subsetneq P_\alpha$ (de még ez a kikötés sem határozná meg unitér ekvivalencia erejéig P-t).

5.9. A spektrum további tulajdonságai

5.9.1. Állítás. (A spektrálleképezések tétele) *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert–tér, $A \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$, és p polinom, $p = \sum_{k=0}^n c_k id^k$. Ekkor $p(A) = \sum_{k=0}^n c_k A^k$-t nevezzük az operátor polinomjának. Ekkor $Sp\, p(A) = p[Sp\, A]$*

Bizonyítás Legyen $\lambda \in \operatorname{Sp}(p(A))$. Ekkor $p - \lambda$ is egy polinom, amelynek gyöktényezős alakja (ld. Matolcsi: Analízis I.)

$$p - \lambda = \alpha \prod_{i=1}^n (\mathrm{id}_\mathbb{C} - \lambda_i),$$

és ekkor

$$p(A) - \lambda I = (p - \lambda)(A) = \alpha \prod_{i=1}^n (A - \lambda_i I)$$

ami akkor nem invertálható, ha legalább az egyik tagja nem az, azaz, ha $\exists \lambda_i$ $A - \lambda_i I$ nem invertálható. Ez pontosan akkor áll fenn, ha $\lambda_i \in \operatorname{Sp} A$. Ezzel a $(\subset)$ irányú tartalmazást beláttuk.

($\supset$) Legyen $\lambda \in \operatorname{Sp} A$. Tegyük fel, hogy ennek ellenére $p(\lambda) \notin \operatorname{Sp}(p(A))$. Ez pontosan azt jelenti, hogy $p(A) - p(\lambda)I$ invertálható. Ugyanakkor $p - p(\lambda)$ is polinom, melynek $p(\lambda)$ gyöke, továbbá

$$p - p(\lambda) = (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - \lambda)q,$$

(polinomosztás, ld. Matolcsi: Analízis I.), így

$$p(A) - p(\lambda)I = (p - p(\lambda))(A) = (A - \lambda I)q(A) = q(A)(A - \lambda I),$$

ahol felhasználjuk, hogy egy adott operátor polinomjai egymással felcserélhetőek (egyszerű számolással beláthtó). Feltételezésünk szerint ez invertálható, így beszorozhatunk az inverzével:

$$I = ((p(A) - p(\lambda)I)^{-1} q(A))(A - \lambda I)$$
$$I = (A - \lambda I)(q(A)(p(A) - p(\lambda)I)^{-1}),$$

és mivel A polinomjai felcserélhetőek, a másodikban az $A - \lambda I$-t jobbról szorzó zárójeles kifejezés egyenlő az elsőben $A - \lambda I$-t jobbról szorzó kifejezéssel, így az csak $A - \lambda I$ inverze lehet, így a feltételezésünkkel ellentmondásra jutottunk. ■

5.9.2. Állítás. *Ha $A, B \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$, akkor $Sp(AB) \setminus \{0\} = Sp(BA) \setminus \{0\}$.*

5.10. Feladatok

5.1. Feladat. *Azt szokták mondani, hogy ha az A és B önadjungált operátorok felcserélhetőek (azaz $AB = BA$), akkor közös sajátvektorrendszerük van. Mutassuk meg, hogy ez nem igaz!*

Megoldás Legyen $\alpha \neq \gamma \in \mathbb{S}^1$. Ekkor a Young–tétel szerint $P_\alpha P_\gamma - P_\gamma P_\alpha = 0$, ugyanakkor a differenciáloperátorok spektrumánál mondottak szerint a sajátvektoraik különböznek.

5.2. Feladat. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ–véges mértéktér, és tekintsük az $\mathcal{L}^2(X; V)$ teret, ahol V Hilbert–tér. Legyen A V korlátos operátora, és $F_A : \mathcal{L}^2(X; V) \to \mathcal{L}^2(X; V), F_A\varphi := A \circ \varphi$. Vizsgáljuk meg ezt az operátort!*

Megoldás Ez az operátor korlátos, és $\|F_A\| = \|A\|$, hiszen

$$\|F_A\varphi\|^2 = \int_X |A\varphi(x)|_V^2 d\mu(x) \leq \int_X \|A\|^2 |\varphi(x)|^2 d\mu(x) \leq \|A\|^2 \|\varphi\|^2,$$

és meg tudunk adni olyan egy normájú sorozatot, amely képének a normája ehhez tart, hiszen a mértéktér σ-véges, így létezik E véges mértékű mérhető halmaz, $\mu(E) \neq 0$. Ugyanakkor $\|A\|$ definíciója szerint $\exists v_n \in V$, hogy $|v_n| = 1$ és $\lim_n |Av_n| = \|A\|$. Ekkor a

$$\varphi_n := \frac{\chi_E v_n}{\sqrt{\mu(E)}}$$

sorozat mentén $\lim_n \|F_A\varphi_n\| = \|A\|$.

Azt is egyszerű számolással beláthatjuk, hogy $F_A^* = F_{A^*}$, így ez az operátor pontosan akkor unitér vagy önadjungált, ha A unitér, ill. önadjungált.

A norma felvételéhez hasonló módszerrel beláthatjuk, hogy

$$\operatorname{Eig} F_A = \operatorname{Eig} A \quad \operatorname{Sp} F_A = \operatorname{Sp} A \quad S_\lambda = \mathcal{L}^2(S_\lambda^A).$$

Ez az operátor is az alkalmazások szempontjából fontos: a kvantummechanikában a spin operátora ilyen (akkor V véges dimenziós).

5.3. Feladat. *Legyen P folytonos projektor, $P \neq 0$, $P \neq I$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $Sp\,P = Eig\,P = \{0, 1\}$*

Megoldás Triviális, hiszen a folytonos operátorok esetén ahhoz, hogy valami reguláris érték legyen, elég megmutatni, hogy $P - \lambda I$ injektív és az inverze folytonos. Az inverz a fenti λ–értékek kivételével a projektorral és az identitással kifejezhető:

$$(P - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{P}{1 - \lambda} - I\right),$$

így mint folytonos operátorok kompozíciója, folytonos.

5.4. Feladat. *Adjuk meg az ℓ^2-beli jobbra– és balratolás operátorának sajátértékeit és spektrumát!*

Megoldás írjuk fel először R sajátértékegyenletét:

$$(0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots).$$

Az egyenletből látható, hogy ha $\lambda \neq 0$, akkor a vektor csak a nulla lehetne, nem sajátérték, ha pedig $\lambda = 0$, akkor is a nulla vektor lehet megoldás, így ez sem jó, így $\operatorname{Eig} R = \emptyset$.

Tudjuk, hogy zárt operátor spektruma megegyezik az adjungáltja spektrumának a komplex konjugáltjával, így vizsgáljuk most L spektrumát. Kezdjük ismét a sajátértékegyenlettel:

$$(x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots),$$

aminek $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1$ esetén $(\lambda^n | n \in \mathbb{N})$ megoldása, így $\operatorname{Eig} L = \{\lambda | |\lambda| < 1\}$. Azt tudjuk, hogy $\overline{\operatorname{Eig} L} \subset \operatorname{Sp} L$, és azt is, hogy mivel L izometrikus, $\operatorname{Sp} L \subset B_1(0)$ az 5.3.4.. állítás szerint, így

$$\operatorname{Sp} R = \operatorname{Sp} R = \{\lambda \in \mathbb{C} | |\lambda| \leq 1\}.$$

5.5. Feladat. *Tekintsük az $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$-beli P differenciáloperátort. Mi P^2 sajátértékeinek a halmaza és a spektruma?*

Megoldás A sajátértékegyenlet formális megoldásai az $\exp^{i\alpha}$ függvények, ahol a „sajátérték" $\lambda = \alpha^2$, azonban ezek nem négyzetesen integrálható függvények, így $\operatorname{Eig} P^2 = \emptyset$. Tudjuk, hogy $\operatorname{Sp} P^2 \subset \mathbb{R}_0^+$, hiszen $P^2 = P^* P$ pozitív önadjungált operátor. Memutatjuk, hogy $\mathbb{R}_0^+$ elemei általánosított sajátértékek: legyen

$$\varphi_n := e^{i\alpha\bullet - |\bullet|^2/n}.$$

ekkor egyszerű számolással belátható, hogy míg

$$\|\varphi_n\|^2 = \sqrt{\frac{n\pi}{2}},$$

ami alulról korlátos, $\lim_n \|P^2\varphi_n - \lambda\varphi_n\|^2 = 0$, így $\operatorname{Sp} P^2 = \mathbb{R}_0^+$.

6. fejezet

Pozitív operátorok

6.0.1. Állítás. *Ha A korlátos lineáris operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert–téren, akkor $\|A^*A\| = \|A\|^2$.*

Bizonyítás Az triviális, hogy $\|A^*A\| \leq \|A^*\|\|A\| = \|A\|^2$. Megmutatjuk, hogy a másik irányú egyenlőtlenség is teljesül:

$$\|A^*A\| = \sup_{\substack{\|y\|=1 \\ \|x\|=1}} |\langle y, A^*Ax\rangle|,$$

így ha $\|x\| = 1$, akkor

$$\|A^*A\| \geq \langle x, A^*Ax\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2,$$

és

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \|A\|^2,$$

az operátornorma definíciója szerint.

A kvantummechanika precíz felépítése szempontjából is fontos az alábbi algebrai struktúra:

6.0.1. Definíció. *Egy H halmazt* **C*–algebrá***nak nevezünk, ha*
(i) algebra: azaz vektortér, amin a lineáris műveleteken kívül még egy szorzás is értelmezett, amelynek a viszonya az eddigi műveletekhez az operátoroknál megszokott
*(ii) *–algebra, azaz van rajta egy „csillagművelet”, azaz egy konjugált lineáris ($(\alpha A)^* = \alpha^* A^*$) antimultiplikatív ($(AB)^* = B^*A^*$) művelet*
*(iii) B^*–algebra (Banach–féle *–algebra), azaz az eddigieken kívül teljesül, hogy $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ és hogy $\|A^*\| = \|A\|$.*
(iv) teljesül rá az ú.n. C^*–tulajdonság: $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

Az előbbi állítás következménye, hogy $\mathcal{L}in\mathcal{H}$ C*–algebra.

A lineáris algebrában egy vektortér bilineáris leképezései és a vektortérből a duálisba való leképezések között találtunk egy természetes azonosítást (ld. Matolcsi: Analízis II.). Most egy hasonló azonosítást fogunk tárgyalni a folytonos szeszkilineáris leképezések és a Hilbert–tér önmagára való leképezései között.

6.0.2. Állítás. *Ha $R : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ folytonos másfél–lineáris leképezés, akkor $\exists | A \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$, hogy $R(y,x) = \langle y, Ax\rangle$ $\forall x, y \in \mathcal{H}$.*

Bizonyítás Rögzítsünk egy $y \in \mathcal{H}$ elemet. Ekkor $\mathcal{H} \to \mathbb{K}, x \mapsto R(y,x)$ folytonos lineáris leképezés, így a Hahn–Banach-tétel (2.7.2.. állítás) szerint

$$\exists | y^* \in \mathcal{H} \quad R(y,x) = \langle y^*, x\rangle \quad (\forall x \in \mathcal{H}),$$

és az $y \mapsto y^*$ leképezés lineáris, folytonos, így

$$\exists | A^* \in \mathcal{L}in\mathcal{H} \quad y^* = A^*y,$$

és így

$$R(y,x) = \langle A^*y, x\rangle = \langle y, A^*x\rangle,$$

és ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

Fontos lehet, hogy hogyan függenek a szeszkilineáris formák tulajdonságai a hozzájuk tartozó lineáris leképezések tulajdonságaitól.

6.0.3. Állítás. *Az R másfél–lineáris forma pontosan akkor hermitikus, ha a hozzá tartozó A lineáris leképezés önadjungált.*

Bizonyítás Ha A önadjungált, akkor

$$R(y,x) := \langle y, Ax\rangle = \langle A^*y, x\rangle = \langle Ay, x\rangle = \langle x, Ay\rangle^* = R^*(x,y).$$

Ebből következik, hogy ilyenkor $R(x,x) = \langle x, Ax\rangle \in \mathbb{R}$.

Azt, hogy ha R hermitikus, akkor A önadjungált, teljesen hasonlóan láthatjuk be. ■

A szeszkilineáris formák lineáris algebrában megismert osztályozását most átvihetjük az operátorokra:

6.0.2. Definíció. *Legyen $S \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$ szimmetrikus. Ekkor azt mondjuk, hogy*
– S **pozitív**, *ha $\langle x, Sx\rangle \geq 0$ $\forall x \in \mathcal{H}$ esetén.*
– S **pozitív definit**, *ha $\langle x, Sx\rangle > 0$ $\forall x \neq 0 \in \mathcal{H}$ esetén.*
– S **szigorúan pozitív definit**, *ha $\langle x, Sx\rangle > \alpha\|x\|^2$ $\forall x \neq\in \mathcal{H}$ esetén.*

Vegyük észre, hogy egy önadjungált operátor által meghatározott szeszkilineáris forma pontosan akkor teljesíti a skalárszorzat axiómáit, ha az operátor pozitív definit. Ugyanakkor a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenséghez kevesebb is elég: az ha a forma pozitív:

$$S \geq 0 \Rightarrow |\langle y, Sx\rangle| \leq \langle y, Sy\rangle\langle x, Sx\rangle,$$

viszont ekkor egyenlőség nemcsak párhuzamos x és y esetén állhat fenn. A bizonyítás természetesen pontosan ugyanúgy történik, mint a skalárszorzat esetén, ld. Gruber: Analízis III.

Ezután bevezethetünk egy rendezést az operátorok terén

6.0.3. Definíció. *Legyen S és T korlátos önadjungált operátor. Ekkor azt mondjuk, hogy S* **nagyobb vagy egyenlő T-vel** *($S \geq T$), ha $S - T \geq 0$.*

A fenti definíció triviálisan ekvivalens azzal, hogy

$$\langle x, Sx\rangle \geq \langle x, Ty\rangle \quad \forall y \in \mathcal{H}.$$

Azt, hogy ez rendezés, a linearitás segítségével könnyen beláthatjuk.

6.0.4. Állítás. *Ha S korlátos önadjungált operátor, akkor*

$$\|S\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, Sx\rangle| =: \alpha$$

Bizonyítás ($\geq$) azt, hogy $\|S\| \geq \alpha$ nagyon könnyen beláthatjuk, hiszen

$$\|S\| = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}} |\langle y, Sx\rangle|,$$

és itt szűkebb halmazra veszük a szuprémumot, így az szükségképpen kisebb vegy egyenlő lesz.

($\leq$) Tudjuk, hogy $\exists\lambda \in \mathbb{S}^1$, hogy

$$|\langle y, Sx\rangle| = \lambda\langle y, Sx\rangle = \langle y, S\lambda x\rangle.$$

Írjuk fel ekkor a következő különbséget:

$$\begin{aligned}\langle y + \lambda x, S(y + \lambda x)\rangle - \langle\langle y - \lambda x, S(y - \lambda x\rangle &= \langle y, Sy\rangle + \langle\lambda x, Sy\rangle + \langle y, S\lambda x\rangle + |\lambda|^2\langle x, Sx\rangle\\ &\quad - \langle y, Sy\rangle + \langle\lambda x, Sy\rangle + \langle y, S\lambda x\rangle - |\lambda|^2\langle x, Sx\rangle\\ &= \langle\lambda x, Sy\rangle + \langle y, S\lambda x\rangle + \langle y, S\lambda x\rangle^* + \langle y, S\lambda x\rangle,\end{aligned}$$

viszont $\langle y, S\lambda y\rangle$ valós, így

$$\begin{aligned}|\langle y, Sx\rangle| &= \frac{1}{4}\left(\langle y+\lambda x, S(y+\lambda x)\rangle - \langle y-\lambda x, S(y-\lambda x)\right)\\ &\leq \frac{1}{4}\alpha\left(\|y+\lambda x\|^2 + \|y-\lambda x\|^2\right) = \frac{\alpha}{2}\left(\|y\|^2+\|x\|^2\right) = \alpha,\end{aligned}$$

hiszen $\|x\| = \|y\| = 1$. (Az egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy $|\langle z, Sz\rangle| \leq \alpha\|z\|^2$, utána pedig a paralellogramma–egyenlőséget(3.1.1.. állítás).) A becslés elejét és a végét összeolvasva:

$$|\langle y, Sy\rangle| \leq \alpha \quad (\|y\| = 1) \Rightarrow \|S\| \leq \alpha,$$

és ezzel a bizonyítás véget ért. ■

Következmény Az állítás triviális következménye, hogy ha $A \leq B$, akkor $\|A\| \leq \|B\|$.

6.0.5. Állítás. *Ha S korlátos pozitív önadjungált operátor, akkor $\|Sx\|^2 \leq \|S\|\langle x, Sx\rangle$.*

Bizonyítás egyszerű számolással:

$$\|Sx\|^4 = |\langle Sx, Sx\rangle|^2 = \langle Sx, Sx\rangle\langle x, S(Sx)\rangle \leq \|S\|\|Sx\|^2\langle x, Sx\rangle,$$

ahol a becslésnél a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenséget használtuk. Ha $\|Sx\| = 0$, akkor az állítás triviálisan teljesül, ellenkező esetben egyszerűsíthetünk vele:

$$\|Sx\|^2 \leq \|S\|\langle x, Sx\rangle,$$

ami a kívánt egyenlőtlenség. ■

A következő állítás egy további hasonlóság az önadjungált operátorok és a valós számok között:

6.0.6. Állítás. *Önadjungált operátorokból álló monoton növekvő korlátos sorozat konvergens, azaz ha $S, S_n \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$ $(n \in \mathbb{N})$ önadjungáltak, $S_n \leq S_{n+1} \leq S$, akkor $\exists(s)\lim_n S_n =: S_0$, ami szintén önadjungált, és $S_0 \leq S$.*

Bizonyítás Legyen $n > m$. Ekkor

$$0 \leq S_n - S_m \leq S - S_1,$$

és tudjuk, hogy $\langle x, S_n x\rangle$ valós monoton növekvő korlátos sorozat, amiből következően $\exists\lim_n\langle x, S_n x\rangle$. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}\|S_n x - S_m x\|^2 = \|(S_n - S_m)x\|^2 &\leq \|S_n - S_m\|\langle x, (S_n - S_m)x\rangle\\ &\leq \|S - S_1\|\langle x, (S_n - S_m)x\rangle = \|S - S_1\|(\langle x, S_n x\rangle - \langle x, S_m x\rangle),\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk az előző állítást. Azt tudjuk, hogy az utolsó formulában lévő zárójeles kifejezésnek létezik határértéke (ld. feljebb), így azt kapjuk, hogy az $S_n x$ sorozat Cauchy–féle, így a Hilbert–tér teljessége miatt létezik határértéke. Az állítás többi részének bizonyítása egyszerű számolás. ■

6.1. Operátorok gyöke és abszolútértéke

A következőkben a négyzetgyök– és az abszolútérték–függvényeket kiterjesztjük a pozitív, illetve a korlátos operátorokra.

6.1.1. Állítás. *Legyen $S \geq 0$ korlátos operátor. Ekkor $\exists|\sqrt{S} \geq 0$, úgy hogy $(\sqrt{S})^2 = S$.*

Bizonyítás Elég az $\|S\| \leq 1$ esetre belátnunk, hiszen ha S normája nagyobb 1-nél, akkor

$$\left\|\frac{S}{\|s\|}\right\| = 1 \quad \sqrt{\frac{S}{\|S\|}} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\|S\|}}.$$

Az $S = 0$ esetet szintén kizárhatjuk, hiszen ekkor triviálisan $\sqrt{S} := 0$ megfelelő.

Emlékeztetünk a valós számok esetén alkalmazott iterációra: Ha) $\leq x \leq 1$, akkor

$$1 - \sqrt{x} = \frac{1 - x + (1-\sqrt{x})^2}{2},$$

és $0 \le 1 - x \le 1$, $0 \le 1 - \sqrt{x} \le 1$, így az $a := 1 - x$, $x := 1 - \sqrt{x}$ definíciókkal megkereshetjük szukcesszív approximációval a

$$z = \frac{a + z^2}{2}$$

egyenlet gyökeit, a következőképpen

$$z_0 := 0$$

$$z_n := \frac{a + z_{n-1}^2}{2}.$$

Ez, ha konvergens, akkor a fentiek szerint a határértéke csak a megoldás lehet, azt kell tehát csak megmutatnunk, hogy a z_n sorozat konvergens.

Teljes indukcióval megmutatható, hogy $0 \le z_n \le 1$, és hogy $z_n \le z_{n+1}$, hiszen

$$z_{n+1} - z_n = \frac{a + z_n^2}{2} - \frac{a + z_{n-1}^2}{2} = (z_n - z_{n-1})(z_n + z_{n-1}),$$

ha tehát $z_n > z_{n-1}$, akkor ez is pozitív. így tehát egy monoton növő korlátos valós sorozatról van szó, ami szükségképpen konvergens. A következőkben ezt fogjuk operátorokra általánosítani.

Legyen

$$T := \frac{S}{\|S\|}.$$

Ekkor, ha $\sqrt{T}$ létezik, akkor

$$I - \sqrt{T} = \frac{1}{2}(I - T + (I - \sqrt{T})^2),$$

é a multkori definícióknak megfelelő definíciókkal ismét a

$$Z = \frac{1}{2}(A + Z^2)$$

operátoregyenlet megoldását keressük. Most is alkalmazhajuk a fenti szukcesszív approximációt:

$$Z_0 := 0$$

$$Z_n := \frac{A + Z_{n-1}^2}{2},$$

és így a sorozat az előbbi 6.0.6.. állítás szerint konvergens. Azt, hogy az operátorok gyöke egyértelmű, úgy mutathatjuk meg, hogy feltesszük, hogy kettő van, és ellentmondásra jutunk (vagy a fenti állítás alkalmazása helyett könnyen megmutathatjuk, hogy az approximáció egy lépése kontrakció, így egy és csak egy fixpontja lehet). ■

6.1.1. Definíció. *Ha $A \ge 0$, akkor a fenti állítás szerint létezik, és egyértelmű egy $\sqrt{A} \ge 0$ operátor, amelyre $(\sqrt{A})^2 = A$. Ezt* **az A operátor négyzetgyöké***nek nevezzük.*

Az 5.0.2.. állítás (Neumann-tétel) szerint ha A zárt, akkor A^*A önadjungált. Az triviális, hogy pozitív is. így értelmes a következő definíció:

6.1.2. Definíció. *Ha $A \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$ (ekkor persze zárt is), akkor az $|A| := \sqrt{A^*A}$ operátort* **az A operátor abszolútértéké***nek nevezzük.*

Mivel egy folytonos operátor az adjungáltjával együtt mindenhol értelmezett, az alábbiak szintén folytonos operátorok:

$$\mathfrak{Re}\, A := \frac{A + A^*}{2} \qquad \mathfrak{Im}\, A := \frac{A - A^*}{2i},$$

és

$$A = \mathfrak{Re}\, A + i\,\mathfrak{Im}\, A.$$

Most egy a komplex számok trigonometrikus alakjához hasonló alak létezését mutatjuk meg.

6.1.2. Állítás. *Ha $A \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$, akkor $\exists V$ izometrikus operátor, hogy $A = V|A|$, és ha W izometrikus és $A = WS$, akkor $S = |A|$, és $W|_{\overline{Ran\, A}} = V|_{\overline{Ran\, A}}$.*

Bizonyítás V-t $\operatorname{Ran} A$-n definiáljuk:

$$V|A|x := Ax \quad (x \in \mathcal{H}),$$

hiszen az $|A|x$ alakú elemek kifeszítik $\operatorname{Ran} A$-t. Ilyen operátor van, hiszen az nem fordulhat elő, hogy $|A|y = |A|x$, de $Ay \neq Ax$, mert ez azzal lenne ekvivalens, hogy létezik olyan x, hogy $|A|x = 0$, de $Ax \neq 0$, és ez nem lehet: megmutatjuk, hogy $\operatorname{Ker}|A| = \operatorname{Ker} A$: Legyen $|A|x = 0$, ekkor

$$0 = \||A|x\|^2 = \langle |A|x, |A|x\rangle = \left\langle x, |A|^2 x\right\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2.$$

így V $\operatorname{Ran} A$-n jól definiált. A fentiekből az is következik, hogy izometrikus, hiszen

$$\||A|x\| = \|Ax\| = \|V|A|x\|,$$

így V kiterjeszthető izometrikusan $\overline{\operatorname{Ran} A}$-ra, és annak a komplementerén is kiterjeszthető izometrikusan (ortogonális kiegészítő alterek).

Legyen $WS = V|A|$. Ekkor $SW^* = |A|V^*$, így $SW^*WS = |A|V^*V|A|$, viszont V és W izometria, így $W^*W = V^*V = I$, így azt kapjuk, hogy $S^2 = |A|^2 = A^*A$, és $|A|$ értékkészletén W meg kell, hogy egyezzen V-vel, hiszen $W|A| = V|A|$. ∎

6.2. Pozitív önadjungált operátorok

Egy korlátos operátor esetén abból, hogy $\langle x, Ax\rangle$ valós $\forall x \in \mathcal{H}$ esetén, az már következik, hogy A szimmetrikus. Ebben a fejezetben a pozitivitást önadjungált (nem feltétlenül korlátos) operátorokra is értelmezzük.

6.2.1. Definíció. *Legyen S önadjungált operátor. Ekkor azt mondjuk, hogy*
– $S \geq 0$, azaz S **pozitív**, *ha $\langle x, Sx\rangle \geq 0$, $\forall x \in Dom\, S$ esetén.*
– S **szigorúan pozitív**, *ha $\exists \alpha > 0$ úgy, hogy $S - \alpha I \geq 0$.*

Vegyük észre, hogy a szigorú pozitivitás definíciója azzal egyenértékű, hogy $\langle x, Sx\rangle \geq \alpha\|x\|^2$, $\forall x \in \mathcal{H}$ esetén.

6.2.1. Állítás. *Ha $S \geq 0$ önadjungált, akkor $Sp\, S \subset \mathbb{R}_0^+$, és S szigorúan pozitív, akkor $Sp\, S \subset \mathbb{R}^+$.*

Bizonyítás Legyen $\lambda \in \mathbb{R}^-$. Meg fogjuk mutatni, hogy ekkor nem lehet spektrumpont. Azt tudjuk, hogy $\langle x, Sx\rangle \geq 0$, $\forall x$ estén, így

$$\langle x, Sx\rangle - \lambda\|x\|^2 \geq -\lambda\|x\|^2 \geq 0 \quad (x \neq 0).$$

Ugyanakkor a baloldal egyenlő azzal, hogy $\langle x, (S - \lambda I)x\rangle \leq \|x\|\|(S - \lambda I)x\|$. Ezt $\|x\|$-val leosztva kapjuk, hogy

$$\|(S - \lambda I)x\| \geq -\lambda\|x\|,$$

amiből következik, hogy $S - \lambda I$ injektív és az inverze folytonos, és ez az 5.4.3.. következmény szerint elég ahhoz, hogy λ reguláris érték legyen.

S szigorú definitása esetén ugyanezt a gondolatmenetet követhetjük, és azt kapjuk, hogy a spektrumpontjai nagyobbegyenlőek, mint a szigorú definitás definíciójában szereplő α. ∎

6.3. Feladatok

6.1. Feladat. *Legyen $P_n \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$ $(n \in \mathbb{N})$ ortogonális projektor, $P_nP_m = 0$ $(n \neq m)$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\exists \sum_n P_n =: P$, ami szintén ortogonális projektor, és $Ran\, P = \overline{\sum_n Ran\, P_n}$.*

Megoldás Az ortogonális projektorok pozitívak, és könnyen belátható, hogy ha $m \geq n$, akkor

$$\sum_{i=1}^{m} P_i \geq \sum_{i=1}^{n} P_i,$$

így a fenti sor részletösszegei felülről korlátos pozitív operátorsorozatot alkotnak, önadjungáltak (hiszen ortogonális projektorok), így a 6.0.6.. állítás szerint

$$\exists (s) \sum_n P_n =: P,$$

ami szintén korlátos, és triviálisan ortogonális projektor: $\operatorname{Ran} P \supset \overline{\sum_n \operatorname{Ran} P_n}$, és egyenlő is vele, hiszen ha $x \perp \overline{\sum_n P_n}$, akkor $Px = 0$, hiszen $Px = \sum_n (P_n x)$, és $P_n x = 0$ $\forall n$.

7. fejezet

Kompakt operátorok

Ebben a fejezetben „könnyen kezelhető” operátorokról lesz szó. A véges dimenziós vektroterek elméletében megszoktuk, hogy egy önadjungált operátornak van projektorfelbontása (ld. Matolcsi: Analízis II.). Ebben a fejezetben olyan operátorokkal fogunk foglalkozni, amelyeknek végtelen dimenzióban is van projektorfelbontása.

Ezen kívül körbejárjuk, hogy mikor értelmezhető egy operátor nyoma. Az triviális, hogy nem minden operátornak van nyoma, hiszen a Heisenberg–féle felcserélési reláció tárgyalásakor mutattunk olyan operátorokat, amelyekre

$$PQ - Qp \subset i\alpha I.$$

Ekkor, ha egy olyan ortonormált rendszert választunk, melynek egyes tagjai a baloldal értelmezési tartományában vannak, a többi pedig azon kívül, akkor a jobboldal nyomáról könnyen láthatjuk hogy ha létezik, akkor $i\alpha$ pozitív számszorosa, a jobboldalé viszont, mivel operátorok szorzatának a nyoma – legalábbis véges dimenzióban – a sorrendjüktől független, nulla.

Szükségünk lesz még a következő, a lineáris algebrában már definiált operátorra: Ha $x, y \in \mathcal{H}$, akkor $|y\rangle\langle x| : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, z \mapsto y\langle x, z\rangle$. ez triviálisan folytonos, és $\||y\rangle\langle x|\| = \|y\|\|x\|$, a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség szerint. Tudjuk, hogy minden egy rangú leképezés ilyen alakba írható, x és y ekkor számszorzó erejéig egyértelmű. A véges rangú leképezések ilyenek lineárkombinációi.

7.1. Kompakt operátorok, relatív kompakt halmazok

7.1.1. Definíció. *Egy $H \subset V$ halmazt* **relatív kompakt***nak nevezünk, ha a lezártja kompakt.*

Bizonyos operátorok nagyon jól jellemezhetőek az értékkészletük relatív kompakt voltával, ezért szükséges a következő definíció:

7.1.2. Definíció. *Egy $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris operátort* **kompakt***nak nevezünk, ha általa korlátos halmaz képe relatív kompakt.*

Megjegyzés A kompakt operátorok szükségképpen folytonosak is, hiszen egy kompakt halmaz mindig korlátos, így ezek az operátorok korlátos halmazt korlátosba képeznek.

Megjegyzés Vegyük észre, hogy egy véges rangú folytonos operátor is szükségképpen kompakt, hiszen véges dimenziós vektortérben egy korlátos halmaz relatív kompakt (mivel a lezártja korlátos és zárt).

7.1.1. Állítás. *A kompakt operátorok lineáris alteret alkotnak a Hilbert–tér korlátos operátorainak terében.*

Bizonyítás Az triviális, hogy ha A kompakt, akkor αA is kompakt. Megmutatjuk, hogy ha A és B kompakt, akkor az összegük is az, hiszen

$$\operatorname{Ran}(A + B) \subset \operatorname{Ran} A + \operatorname{Ran} B,$$

így ez a lezártakra is igaz, továbbá kompakt halmazok komplexusösszege is kompakt. ■

7.1.2. Állítás. *Ha A kompakt operátor, és $B \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$, akkor AB és BA is kompakt.*

Bizonyítás (AB) Mivel B folytonos, egy korlátos halmaz B általi képe korlátos, és ennek A általi képe A kompaktsága miatt relatív kompakt.

(BA) Ekkor azt használjuk fel, hogy $(BA[H]) = B[A[H]]$, és mivel B folytonos

$$\overline{(BA)[H]} = \overline{B[A[H]]} \subset B[\overline{A[H]}],$$

ugyanakkor kompakt halmaz folytonos képe kompakt. ∎

Szintén gyakran előforduló struktúra az **ideál**: egy algebra olyan lineáris altere, amelyet az algebra elemeivel szorozva szintén az ideálban lévő elemet kapunk. A fenti tétel azt mondja ki, hogy a folytonos operátorok terében a kompakt operátorok jobb– és baloldali ideált alkotnak.

A következő fontos tétel bizonyítása hosszadalmas, ezért a tételt bizonyítás nélkül mondjuk ki:

7.1.3. Állítás. *A kompakt operátorok halmaza a véges rangú operátorok halmazának a lezártja.*

Ennek segítségével könnyen bizonyíthatjuk a következő állítást:

7.1.4. Állítás. *Ha A kompakt, akkor A^* is kompakt.*

Bizonyítás Tudjuk, hogy az uniform topológiában az adjungálás folytonos művelet, így elég véges rangú operátorokra megmutatnunk, azaz elég azt belátnunk, hogy ha A véges rangú, akkor A^* is az. Ismert, hogy

$$\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Ran} A)^{\perp},$$

így $A^*|_{\operatorname{Ran} A}$ injektív, és $A^*[\operatorname{Ran} A] = \operatorname{Ran} A^*$. Mivel $\operatorname{Ran} A$ véges dimenziós, és az A^* általi képe is legfeljebb ugyanannyi dimenziós lehet, A^* is véges rangú kell legyen. ∎

Ezzel az állítással azt láttuk be, hogy a kompakt operátorok *–ideált alkotnak.

7.1.5. Állítás. *Ha A kompakt operátor, akkor $Sp\,A = \overline{Eig\,A}$, és minden nemnulla sajátértékhez tartozó sajátaltere véges dimenziós, és a sajátértékek egyetlen torlódási pontja a 0 lehet, azaz $Sp\,A \setminus Eig\,A \subset \{0\}$.*

Ez az állítás nagyon jól használható arra, hogy egy operátorról bebizonyítsuk, hogy nem kompakt.

7.1.6. Állítás. *Ha A kompakt operátor, akkor $|A| = \sqrt{A^*A}$ is az.*

Bizonyítás Tudjuk, hogy létezik olyan V izometria, hogy $A = V|A|$, így

$$V^*A = V^*V|A| = |A|,$$

és mivel V folytonos, V^* is az, így $|A| = V^*A$ a 7.1.2.. állítás szerint kompakt. ∎

Ha egy S operátor kompakt, akkor a sajátalterei kifeszítik az egész Hilbert–teret. Ha S ezen kívül még önadjungált is, akkor a sajátalterei ortogonálisak egymásra.

7.2. Nyomoperátorok

Ebben a szakaszban azokkal az operátorokkal fogunk foglalkozni, amelyeknek értelmes a nyoma.

7.2.1. Definíció. *Egy $A \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$ kompakt operátor* **nyomoperátor**, *ha minden $(e_i|i \in I)$ teljes ortonormált rendszer esetén $\exists \sum_{i\in I}\langle e_i, Ae_i\rangle =: Tr\,A$, amit ekkor* **az A operátor nyomá***nak nevezünk.*

Be lehet látni, hogy ha egy teljes ortonormált rendszer esetén létezik egy folytonos operátor nyoma, akkor az operátor kompakt, és ekkor a nyoma minden más ortonormált rendszer esetén is létezik, és az ortonormált rendszertől független, azonban ezek a bizonyítások igen hosszadalmasak, ezért ezt is a definíció részének tekintjük. Az, hogy ha valamennyi TONR estén létezik a nyom, akkor az ortonormált rendszertől független, egyszerű számolással (a véges dimenziós esethez hasonlóan) bizonyítható.

Ha S önadjungált nyomoperátor, akkor vehetünk sajátvektorokból álló bázist (hiszen a sajátalterei kifeszítik a Hilbert–teret), így

$$\operatorname{Tr} S = \sum_{i\in I}\langle e_i, Se_i\rangle = \sum_{i\in I}\lambda_i.$$

Látható tehát, hogy egy pozitív önadjungált operátor pontosan akkor nyomoperátor, ha a sajátértékei felösszgezhetőek.

A következő állítást nem bizonyítjuk:

7.2.1. Állítás. *A pontosan akkor A nyomoperátor, ha $|A|$ is nyomoperátor.*

Ekkor természetesen a 6.2.1.. állítás szerint $\operatorname{Eig}|A| \subset \mathbb{R}_0^+$.

A kvantummechanikában a nyomoperátorok egyik fontos alkalmazása a sűrűségmátrix: egy olyan pozitív nyomoperátor, amelyre $\operatorname{Tr} W = 1$. a kvantummechanikában szeparábilis Hilbert–terekkel dolgozunk, így lehet $(e_n | n \in \mathbb{N})$ teljes ortonormált rendszer W sajátvektorainak rendszere, és λ_n az e_n-hez tartozó sajátérték. Ekkor

$$W = \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|,$$

ahol $\lambda_n \geq 0$ és $\sum_n \lambda_n = 1$. Ekkor $|e_n\rangle\langle e_n|$ az e_n vektor által kifeszített altér projektora, ez W **projektorfelbontása**. Azt egyszerű számítással beláthatjuk, hogy a fenti összeg legalább erős összeg, ha felírjuk mindkét oldal hatását egy adott x vektorra. Ha két folytonos lineáris leképezés egy Schauder–bázison megegyezik, akkor már mindenütt meg kell hogy egyezzen.

Azt, hogy a fenti összeg normában is konvergens, úgy láthatjuk be, hogy felhasználjuk azt az állítást, miszerint a kompakt operátorok véges rangúakból álló sorozatok határértékei. A jobb oldalon egy véges rangú operátorokból álló sorösszeg szerepel.

Szintén a kvantummechanikai alkalmazás szempontjából fontos az alábbi állítás:

7.2.2. Állítás. *Ha W pozitív önadjungált nyomoperátor és $A \in \mathcal{L}in\mathcal{H}$, akkor AW és WA nyomoperátor, $\operatorname{Tr}(WA) = \operatorname{Tr}(AW)$.*

Bizonyítás Legyen $W = \sum_i \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$ és $(x_j | j \in J)$ teljes ortonormált rendszer. Most a

$$\sum_j \langle x_j, AWx_j\rangle$$

sor konvergenciáját vizsgáljuk:

$$\sum_j \langle x_j, AWx_j\rangle = \sum_j \left\langle x_j, A\Big(\sum_i \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|\Big)x_j \right\rangle = \sum_j \sum_i \lambda_i \langle x_j, Ae_i\rangle\langle e_i, x_j\rangle.$$

Ebben a kifejezésben egy kettős összeg szerepel. Ez a sorösszegeknél tanultak (ld. Gruber: Analízis III.) szerint, ha az abszolútértékek valamelyik sorrendben felösszegezhetőek, akkor a kettős összeg létezik, a sorrendtől függetlenül.

$$\sum_i \lambda_i \sum_j |\langle x_j, Ae_i\rangle||\langle e_i, x_j\rangle| \leq \sum_i \lambda_i \sqrt{\sum_j |\langle x_j, Ae_i\rangle|^2} \sqrt{\sum_j |\langle e_i, x_j\rangle|^2} \leq \sum_i \lambda_i \|A\| < \infty,$$

ahol az első egyenlőtlenség a Cauchy–Schwartz egyenlőtlenségből adódott, utána a második tag a Parseval–egyenlőség (3.6.3.. állítás szerint) éppen $\|x_i\| = 1$. Ezután felhasználtuk, hogy $\|Ae_i\| \leq \|S\|$, majd azt, hogy W nyomoperátor. Ebben a sorrendben tehát abszolút felösszegezhető a kettős összeg, így mindegy, hogy melyik sorrendben számítjuk ki.

$$\sum_j \langle x_j, AWx_j\rangle = \sum_i \lambda_i \sum_j \langle x_j, Ae_i\rangle\langle e_i, x_j\rangle \leq \|A\| \sum_i \lambda_i < \infty,$$

ahol ismét a Parseval–egyenlőséget használtuk fel az átalakításnál, és utána a becslésnél $\|A\|$ definícióját. ■

Vegyük észre, hogy ennek az állításnak a felhasználásával pozitív önadjungált nyomoperátor esetére azt is beláthatjuk, hogy a nyom független a teljes ortonormált rendszertől: egyszerűen A helyére az identitásoperátort írjuk.

8. fejezet

Fourier–transzformációk és differenciáloperátorok

8.1. Multipolinomok, multipolinomiális differenciáloperátorok

Tekintsük $C^\infty(\mathbb{R}^N)$-et, azaz az $\mathbb{R}^N$-en értelmezett (valós értelemben) végtelenszer differenciálható (komplex értékű) függvényeket.

Ekkor, ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, akkor a szokásos szorzásoperátor,

$$M_f : C^\infty(\mathbb{R}^N) \to C^\infty(\mathbb{R}^N), \varphi \mapsto f\varphi,$$

mindenhol értelmezett.

8.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy p* **multipolinom**, *ha projekcióhatványok lineáris kombinációja. Az egy tagban szereplő kitevők összegei közül a legnagyobbat a multipolinom* **fokszámá***nak nevezzük.*

Ekkor p az alábbi alakba írható:

$$p = \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_N \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \le n}} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N} \mathrm{pr}_1^{\alpha_1} \cdots \mathrm{pr}_N^{\alpha_N},$$

ahol n p fokszáma.

A rövidebb írásmód kedvéért bevezetjük a következő jelölést: legyen $\alpha : \{1,\ldots,N\} \to \mathbb{N}_0, i \mapsto \alpha_i$ függvény, $|\alpha| := \sum_{i=1}^N \alpha_i$ (egyes norma). Ekkor

$$p = \sum_{|\alpha| \le n} c_\alpha \mathrm{pr}^\alpha.$$

8.1.2. Definíció. *Egy multipolinomba a projekciók helyére az ugyanolyan sorszámú parciális deriválás operátorát írva* **multipolinomiális differenciáloperátor***t kapunk. Ekkor a*

$$p(\pm iD) := \sum_{|\alpha| \le n} c_\alpha (\pm i\partial_1)^{\alpha_1} \cdots (\pm i\partial_N)^{\alpha_N}$$

jelölést alkalmazzuk.

Az, hogy a multipolinomba a differenciáloperátorok $\pm i$-szeresét írtuk, csak kényelmi szempont, ilyenkor természetesen egy másik multipolinomját kapjuk az i-vel meg nem szorzott parciális deriváló operátoroknak.

Vegyük észre, hogy ezek az operátorok is az egész $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ téren értelmezettek.

8.1.3. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}^N$. Ekkor az*

$$L_a : C^\infty(\mathbb{R}^N) \to C^\infty(\mathbb{R}^N), (L_a\varphi)(x) := \varphi(x-a)$$

operátort **az a-val való eltolás** *operátorának nevezzük.*

8.1.4. Definíció. *Legyen $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ C^∞–diffeomorfizmus (az egész téren értelmezett végtelenszer differenciálható bijekció, melynek az inverze is differenciálható). Ekkor a*

$$K_u : C^\infty(\mathbb{R}^N) \to C^\infty(\mathbb{R}^N), \varphi \mapsto \varphi \circ u^{-1}$$

operátort **az u^{-1}-el való kompozízió operátorá***nak nevezzük.*

Vegyük észre, hogy ha egy bijekció végtelenszer differenciálható, és az inverze differenciálható, akkor az inverzfüggvény–tétel (ld. Keresztfalvi: Analízis IV.) szerint az inverze is végtelenszer differenciálható.

Ebben a definícióban is praktikus szempontok alapján írtunk u^{-1}-et, és nem u-t, hiszen így lesz igaz, hogy

$$K_u \circ K_v = K_{u \circ v}.$$

Térjünk még ki arra is, hogy hogyan lehet ezeket az operátorokat tetszőleges V affin tér esetén értelmezni. Legyen az affin tér alatti vektortér $\mathbb{V}$.

A multipolinomok esetében a projekciók nem értelmesek. Ezek helyett bevezethetünk $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_N \in \mathbb{V}^*$ duális beli elemeket, és egy $O \in V$ kezdőpontot. Ekkor egy multipolinom:

$$p : x \mapsto \sum_{|\alpha| \leq n} c_\alpha (\mathbf{z}_1 | x - O)^{\alpha_1} \cdots (\mathbf{z}_N | x - O)^{\alpha_N}$$

alakú lehet.

A differenciálás esetében $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N \in \mathbb{V}$ elemeket kell bevezetnünk, és ekkor a multipolinomiális differenciáloperátor a

$$\varphi \mapsto \sum_{|\alpha| \leq n} c_\alpha D^{|\alpha|} \varphi(\times_{k=1}^{\alpha_1} \mathbf{v}_1, \ldots, \times_{k=1}^{\alpha_N} \mathbf{v}_N)$$

alakú lesz.

Most jobban látható a multipolinom és a multipolinomiális differenciáloperátor fogalma közötti különbség. Ebben az esetben nincs értelme arról beszélni, hogy egy adott multipolinomnak megfelelő multipolinomiális differenciáloperátor, hiszen ehhez szükség lenne egy kanonikus izomorfizmusra $\mathbb{V}$ és $\mathbb{V}^*$ között.

Az eltolás és a kompozíció teljesen ugyanúgy értelmezhető, mint $\mathbb{R}^N$ esetében, csak most $a \in \mathbb{V}$ elemmel lehet eltolni, és $u : V \to V$ diffeomorfizmus inverzével komponálni.

8.2. Gyorsan csökkenő függvények

Most definiáljuk azoknak a függvényeknek a halmazát, amelyekre könnyen értelmezhető a Fourier–transzformáció.

8.2.1. Definíció. *Azokat a függvényeket, melyeknek akármilyen multipolinomiális deriváltja tetszőleges multipolinommal megszorozva is korlátos,* **gyorsan csökkenő függvények***nek nevezzük. Ezek halmaza*

$$S(\mathbb{R}^N) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) | \forall p, q \text{ multipolinom esetén } qp(\pm iD)\varphi \text{ korlátos} \right\}.$$

Ez a halmaz nem üres, a nulla, a Gauss–görbe és a kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvények mind gyorsan csökkenők.

Megjegyzés A definíció egyenértékű azzal, hogy $p(\pm iD)q\varphi$ legyen korlátos, hiszen egy multipolinom akármilyen multipolinomiális deriváltja is multipolinom.

Vegyük észre, hogy a gyorsan csökkenő függvények lineáris teret alkotnak.

8.2.1. Állítás. *Egy φ függvény pontosan akkor gyorsan csökkenő, ha végtelenszer differenciálható, és $\forall p, q$ multipolinom esetén $\lim\limits_{\infty} qp(\pm iD)\varphi = 0$.*

Bizonyítás Először is emlékeztetünk arra, hogy több dimenziós esetben mit jelent a végtelenben vett határérték: egy függvénynek a akkor a határértéke a végtelenben, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz található $r > 0$, hogy $\forall x \in G_r^{\downarrow}(0)$ esetén $|f(x) - a| < \varepsilon$. Ebből rögtön látható, hogy ($\Leftarrow$) triviális: vesszük az 1-hez tartozó sugarat, akkor a nulla r sugarú környezetén kívül a függvény 1-nél kisebb, azon belül pedig szintén korlátos, hiszen folytonos függvény kompakt halmazon korlátos.

($\Rightarrow$) Tekintsük a

$$\left(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2\right)^m$$

multipolinomot. A feltevésünk szerint $\left(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2\right)^m qp(\pm iD)\varphi$ korlátos, hiszen multipolinomok szorzata multipolinom, azaz

$$\left|\left(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2\right)^m qp(\pm iD)\varphi\right| \leq K,$$

amiből következik, hogy

$$|qp(\pm iD)\varphi| \leq \frac{K}{\left(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2\right)^m},$$

ami viszont a végtelenben a nullához tart. ∎

8.2.2. Állítás. $S(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$.

Bizonyítás A $p=\infty$ eset triviálisan benne van a definícióban. Ha $p \neq \infty$, akkor az előző állítás bizonyítása szerint

$$|\varphi|^p \leq \frac{K^p}{\left(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2\right)^{mp}},$$

ami, ha $2mp-(N-1) \geq 2$ teljesül, akkor integrálható, hiszen $\mathbb{R}^N$ Lebesgue–mértéke polárkoordinátákban $\ldots r^{N-1}dr$ alakú. ∎

8.3. Fourier–transzformációk

8.3.1. Definíció. *Legyen $\varphi \in S(\mathbb{R}^N)$. Ekkor φ pozitív (negatív)* **Fourier–transzformáltjá***nak nevezzük az*

$$F_\pm\varphi := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm i\bullet\cdot x}\varphi(x)dx$$

függvényt.

Az integrál létezik, hiszen a benne szereplő exponenciális abszolútértéke 1, φ pedig az előző állítás szerint integrálható.

8.3.1. Állítás. $F_\pm\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Bizonyítás a paraméteres integrálok differenciálhatóságáról szóló tétel (ld. Matolcsi: Analízis V.) egyszerű következménye. ∎

A gyorsan csökkenő függvények teréből a fejezet elején definiált operátorok közül csak a függvénnyel való szorzás és a kompozíció vezet ki, azonban ezek egy részhalmazára is zárt $S(\mathbb{R}^N)$: a multipolinommal való szorzásra és a lineáris leképezéssel való komponálásra.

8.3.2. Állítás. *A Fourier–transzformáció kapcsolata a fejezet elején definiált operátorokkal a következő:*

$$\begin{array}{ll}
(i) & F_\pm \circ M_p = p(\mp iD)\circ F_\pm \\
 & M_p \circ F_\pm = F_\pm \circ p(\pm iD) \\
(ii) & F_\pm \circ L_a = M_{\exp(\pm ia\bullet)} \circ F_\pm \\
 & L_a \circ F_\pm = F_\pm \circ M_{\exp(\pm ia\bullet)} \\
(iii) & F_\pm \circ K_A = |\det A| K_{A^{*-1}} \circ F_\pm \\
 & K_A \circ F_\pm = F_\pm \circ |\det A| K_{A^{*-1}}.
\end{array}$$

Bizonyítás Csak néhány példán megmutatjuk a bizonyítás módszerét. Például (i)-ben a Fourier–transzformáció lineáritása miatt elég megmutatni egyetlen parciális deriválásra:

$$\begin{aligned}
(\mp i\partial_k F_\pm\varphi)(y) &= \mp i\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}\varphi(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} \mp i(\pm ix_k)e^{\pm iy\cdot x}\varphi(x)dx = (F_\pm(\mathrm{pr}_k\cdot\varphi))(y).
\end{aligned}$$

A (ii) állítás az exponenciális (a kitevőjében egy különbség van) két tagra való szétbontásával egyszerű számolással adódik, az integrál alól az integrálási változótól nem függő tag kiemelhető.

(iii) Az integrálhelyettesítés alapképletének (Matolcsi: Analízis V.) alkalmazásával:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iyx}\varphi(A^{-1}x)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iyAz}\varphi(z)|\det A|dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iA^*yz}\varphi(z)|\det A|dz = (2\pi)^{N/2}|\det A|(F_\pm\varphi)(A^*y).\blacksquare\end{aligned}$$

8.3.3. Állítás. *Gyorsan csökkenő függvények Fourier–transzformáltja gyorsan csökkenő.*

Bizonyítás Azt szeretnénk belátni, hogy ha φ gyorsan csökkenő, akkor tetszőleges p és q multipolinomokra $qp(\mp iD)F_\pm\varphi$ korlátos. Felhasználva, hogy az előző állítás szerint

$$qp(\mp iD)F_\pm\varphi = qF_\pm M_p\varphi = F_\pm q(\pm iD)M_p\varphi,$$

a következő becslést végezhetjük:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iyx}(q(\pm iD)p\varphi)(x)dx\right| &= \left|\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iyx}(q(\pm iD)p\varphi(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2)^m\frac{1}{(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2)^m})(x)dx\right| \\ &\le K\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2)^m} < \infty,\end{aligned}$$

ha m elég nagy, azonban m tetszőleges. (Felhasználtuk az előző szakasz végén szereplő állítások bizonyítását.)■

8.3.4. Állítás. *A Gauss–görbe a Fourier–transzformáció sajátvektora, azaz*

$$\eta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-|x|^2/2} \quad F_\pm\eta = \eta.$$

Bizonyítás ($N = 1$) Ekkor tudjuk, hogy

$$\eta' = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\eta,$$

ezért keressük a

$$(\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R})? \quad \xi' = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\xi$$

differenciálegyenlet megoldásait. Mivel ez egy elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet, valamennyi megoldása η számszorosa.

Rendezzük az egyenletet egy oldalra, és vegyük a Fourier–transzformáltját!

$$0 = F_\pm(\mp i\xi' \mp i\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\xi) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}F_\pm\xi \mp i(F_\pm\xi)',$$

azaz a Fourier–transzformált ugyanazt az

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(F_\pm\xi) + (F_\pm\xi)' = 0$$

egyenletet elégíti ki, mint η, így annak számszorosa:

$$F_\pm\eta = C\eta,$$

és a konstanst meg lehet határozni a nullában felvett értékekből: egyrészt $\eta(0) = 1$, másrészt

$$(F_\pm\eta)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^0 e^{-x^2/2}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1.$$

($N > 1$) Esetén az exponenciálist tagokra bontva

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iyx}e^{-|x|^2/2}dx = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy_1x_1}\cdots e^{\pm iy_Nx_N}e^{-x_1^2/2}\cdots e^{-x_N^2/2}dx_1\cdots dx_n,$$

Fubini tétele (ld. Matolcsi: Analízis V.) alapján visszavezetjük az $N = 1$ esetre. ■

8.4. A Fourier–transzformáció inverze és kiterjesztése

8.4.1. Állítás. *A Fourier–transzformáció bijekció,* $F_{\pm}^{-1} = F_{\mp}$.

Bizonyítás Vegyük észre, hogy ha $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^N)$, akkor az

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}, (x,y) \mapsto e^{iyx}\varphi(x)\psi(y)$$

függvény integrálható, és Fubini tétele szerint tetszőleges sorrendi integrál ugyanazt az eredményt adja, azaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{iyx}\varphi(x)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\varphi(x) \int_{\mathbb{R}^N} e^{iyx}\psi(y)dy \right) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi(y)(F_{\pm}\varphi)(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)(F_{\pm}\psi)(x)dx.$$

Legyen $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\eta_\alpha(x) := \eta(\alpha x).$$

Ekkor, mivel $\eta_\alpha = K_{1/\alpha}\eta$, a 8.3.2.. állítás szerint

$$F_{\pm}\eta_\alpha = (F_{\pm} \circ K_{1/\alpha})\eta = \frac{1}{\alpha^N} e^{-|\bullet|^2/2\alpha^2}.$$

Ezt írva a fenti azonosságba φ helyére:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi(y) \frac{1}{\alpha^N} e^{-|y|^2/2\alpha^2} dy = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|\alpha x|^2/2} (F_{\pm}\psi)(x)dx,$$

majd az $x = y/\alpha$ változótranszformációt végrehajtva a bal oldalon, azt kapjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi(\alpha x) e^{-|x|^2/2} dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|\alpha x|^2/2} (F_{\pm}\psi)(x)dx.$$

A bal oldalon α-tól független integrálható majoráns $\|\psi\|_\infty \eta$, a jobb oldalon pedig $F_{\pm}\psi$, így a Lebesgue–tétel szerint az $\alpha \to 0$ határátmenet végrehajtható az integrandusban:

$$(2\pi)^{N/2}\psi(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(0) e^{-|x|^2/2} dx = \int_{\mathbb{R}^N} (F_{\pm}\psi)(x)dx.$$

ezután felhasználva azt, hogy

$$\psi(z) = (L_{-z}\psi)(0),$$

azt kapjuk, hogy

$$(2\pi)^{N/2}\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (F_{\pm}L_{-z}\psi)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{\mp izx}(F_{\pm}\psi)(x)dx,$$

ahol ismét fölhasználtuk a 8.3.2.. állítást. Ezzel megkaptuk a

$$\psi = F_{\mp}F_{\pm}\psi$$

egyenlőséget, amit be akartunk bizonyítani. ■

8.4.2. Állítás. *A Fourier–transzformáció megtartja az* L^2*–skalárszorzatot, azaz* $\langle F_{\pm}\varphi, F_{\pm}\psi = \langle \varphi, \psi \rangle$ $\forall \varphi, \psi$ *esetén.*

Bizonyítás Ismét az előző tétel bizonyításának az elején belátott azonosságot fogjuk alkalmazni:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (F_{\pm}\varphi)^*(F_{\pm}\psi) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi F_{\pm}(F_{\pm}\varphi)^* = \int_{\mathbb{R}^N} \psi\varphi^*,$$

ahol felhasználtuk az említett azonosságot, valamint azt, hogy $(F_{\pm}\varphi)^* = F_{\mp}\varphi^*$, és az előző tételt. ■

8.4.3. Állítás. *A Fourier–transzformáció egyérterlműen kiterjeszthető az* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ *térre, azaz* $\exists|\overline{F_{\pm}} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ *unitér operátor, hogy* $\overline{F_{\pm}} \supset F_{\pm}$. *Ezt az operátort* **Fourier–Plancherer-operátor***nak nevezzük (és a továbbiakban a felülvonást elhagyjuk).*

Bizonyítás Az $S(\mathbb{R}^N)$ tér sűrű $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$-ben, hiszen a kompakt tartójú folytonosan differenciálható függvények benne vannak, és ezekről már a Hilbert–terekről szóló fejezetben megmutattuk, hogy totális halmazt alkotnak. A fenti állítások szerint $F_\pm$ normatartó, így folytonos, emiatt folytonosan kiterjeszthető az értlemezési tartományának lezártjára. A 4.4.2.. állítás szerint egy izometrikus bijekció unitér. ■

Megjegyzés Ha $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, akkor a Fourier–transzformáltját a Fourier–transzformáció egyértelmű kiterjesztése miatt a

$$F_\pm\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm i \bullet x} \varphi(x) dx$$

képlet adja, de ha φ nem integrálható, akkor a fenti integrál nem értelmes, a Fourier–transzformáltat formálisan mégis gyakran ebbe az alakba írjuk. Ez nem egészen helytelen, hiszen véges mértékű halmazon a négyzetesen integrálható függvények egyben integrálhatók is (ld. Matolcsi: Analízis V.), így

$$\chi_{G_r(0)}\varphi \in L^2 \cap L^1.$$

Ekkor

$$F_\pm \chi_{G_r(0)}\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{G_n(0)} e^{\pm i \bullet x} \varphi(x) dx,$$

és mivel $(\mathcal{L}^2) \lim_n \chi_{G_r(0)}\varphi = \varphi$, és a Fourier–transzformáció folytonos,

$$F_\pm\varphi = \lim_n \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{G_n(0)} e^{\pm i \bullet x} \varphi(x) dx.$$

8.5. Differenciáloperátorok

Már a Hilbert–terek operátoraival foglalkozó fejezetben értelmeztünk differenciáloperátorokat $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$-n és $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$-en, azonban ehhez fölhasználtuk az abszolút folytonosság fogalmát, ami $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ esetén nehezen megfogható. Ennek a fejezetnek az elején értelmeztük a differenciáloperátorokat a gyorsan csökkenő függvényeken. Ugyanakkor az egész $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$-en nem tudjuk követni az $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ esetén alkalmazott módszert, hiszen azt nem értelmeztük, hogy egy függvény valamelyik változójában abszolút folytonos, így már a parciális deriváltat sem tudjuk definiálni.

Most megkerüljük ezt a nehézséget, hiszen a 8.3.2.. állítás szerint tudjuk, hogy a differenciáloperátorokat az $S(\mathbb{R}^N)$ téren ki tudjuk fejezni a Fourier–transzformációval és a multipolinommal való szorzás operátorával.

8.5.1. Definíció. *Legyen p multipolinom. Ekkor az*

$$F_\pm \circ M_p \circ F_\pm^{-1} =: p(\mp iD)$$

operátort a p multipolinomhoz tartozó **multipolinomiális differenciáloperátor***nak nevezzük.*
Ennek speciális eseteként az

$$F_+ \circ M_{pr_k} \circ F_+^{-1} =: -i\partial_k =: P_k$$

operátort a k-**adik parciális differenciálás operátorá***nak nevezzük.*

A régebben értelmezett differenciáloperátorokhoz képest most lesz még egy nehézségünk: ebből nagyon nehéz az operátor értelmezési tartományát kitalálni.

Fontos megjegyezni, hogy ezek az operátorok a kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvényekre leszűkítve már lényegében önadjungáltak.

Tárgymutató