MATOLCSI TAMÁS

ANALÍZIS VI.
Komplex függvények

Tartalom

1. Cauchy–Riemann-egyenletek. A konform leképezés

1.1. A komplex számok halmaza a szokásos összeadással és szorzással vektortér önmaga (mint test) fölött; röviden, $\mathbb{C}$ komplex vektortér. Természetesen (mint minden komplex vektortér), ha csak a valós számokkal való szorzást tekintjük, akkor valós vektortér. Ez a valós vektortér éppen $\mathbb{R}^2$.

Egy $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lineáris leképezés nem más, mint egy komplex számmal való szorzás; ezért a $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lineáris leképezéseket komplex számokkal azonosíthatjuk. Természetesen itt komplex lineáris leképezésekről beszélünk, vagyis olyanokról, amelyek alól a komplex számmal való szorzás kiemelhető. A $\mathbb{C}$-lineáris leképezések persze $\mathbb{R}$-lineárisak is. Más szóval, egy komplex számmal való szorzásnak megfelel egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés. Ez utóbbit, mint tudjuk, egy mátrixszal adhatjuk meg. Könnyű látni, hogy az $a + ib$ komplex számmal való szorzásnak az

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

mátrix felel meg. Ebből azt is könnyen következtethetjük, hogy az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mátrix mint $\mathbb{R}$-lineáris leképezés pontosan akkor $\mathbb{C}$-lineáris is, ha

$$a_{11} = a_{22} \qquad \text{és} \qquad a_{12} = -a_{21}.$$

1.2. Tudjuk, hogy egy komplex számmal való szorzás forgatást és nyújtást jelent (Analízis I.27.3.–27.4.). Közelebbről, az $re^{i\varphi}$ trigonometrikus alakban megadott komplex számmal való szorzás φ szöggel való forgatás és r-szeres nyújtás, azaz mint $\mathbb{R}^2$ lineáris transzformációja, a következő mátrixszal adható meg:

$$r \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Ezért egy komplex számmal való szorzás az aritmetikai sík szögtartó lineáris transzformációja: két vektor képének szöge megegyezik az eredeti vektorok szögével.

1.3. Vegyünk egy $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ differenciálható függvényt. Ekkor, az általános értelmezés szerint (Analízis IV.B.1.2.), $f'(z)$, az f függvény z pontbeli differenciálhányadosa, $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lineáris leképezés, azaz egy komplex számmal való szorzás.

Ha most $\mathbb{C}$-nek csak a valós vektortér-struktúráját tekintjük, akkor f-et mint $\mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^2$ függvényt fogjuk fel. Jelölje ekkor f_1 és f_2 az f komponenseit, azaz $f = (f_1, f_2)$. (A komplex struktúrára nézve f_1 és f_2 az f valós, illetve képzetes része.) Természetesen, ha f $\mathbb{C}$-differenciálható, akkor $\mathbb{R}$-differenciálható is, deriváltfüggvénye a

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix}$$

mátrix, és

$$\partial_1 f_1 = \partial_2 f_2 \qquad \text{és} \qquad \partial_1 f_2 = -\partial_2 f_1.$$

Sőt, az előzőekben mondottak alapján megállapíthatjuk, hogy egy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^2$ függvény pontosan akkor $\mathbb{C}$-differenciálható, ha $\mathbb{R}$-differenciálható, és parciális deriváltjaira teljesülnek a fenti **Cauchy–Riemann-egyenletek** (Analízis IV.B.5.2.).

1.4. Ha feltesszük, hogy az f komplex függvény kétszer differenciálható (meglátjuk majd, hogy ez a feltevés elhagyható), akkor a Cauchy–Riemann-egyenletekből azt kapjuk, hogy f-nek mind a valós, mind a képzetes része **harmonikus**, azaz kielégíti a **Laplace-egyenletet**:

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2) f_1 = (\partial_1^2 + \partial_2^2) f_2 = 0.$$

1.5. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható függvény, amelynek a differenciálhányadosa sehol sem nulla. Vegyünk az f értelmezési tartományában két görbét (Analízis IV.A.12.1.), G_1-et és G_2-t, amelyek a z pontban metszik egymást. Paraméterezzük a görbéket a $p_1 : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{C}$, illetve a $p_2 : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvényekkel. Ekkor a görbék érintővektorai a metszéspontban $v_1 := \dot{p}_1(p_1^{-1}(z))$, illetve $v_2 := \dot{p}_2(p_2^{-1}(z))$. Az inverzfüggvény-tétel következtében $f[G_1]$ és $f[G_2]$ szintén görbék, amelyek paraméterezése $f \circ p_1$, illetve $f \circ p_2$. Ezek a görbék is metszik egymást, érintővektoraik a metszéspontban $f'(z)v_1$ illetve $f'(z)v_2$. Az előbbiekben mondottak szerint ez a két érintő ugyanakkora szöget zár be, mint az eredeti két érintő.

Megállapíthatjuk tehát, hogy egymást metsző görbéknek az f általi képe két olyan görbe, amelyek ugyanakkora szögben metszik egymást. Ezt a tulajdonságot úgy szokták megfogalmazni, hogy a függvény az értelmezési tartományát (a komplex sík egy nyílt részhalmazát) **konform módon** képezi le a komplex síkra.

Megjegyzés (i) Látni fogjuk később, hogy a folytonos differenciálhatóság helyett elég feltennünk a differenciálhatóságot, mert egy differenciálható komplex függvény automatikusan végtelen sokszor differenciálható.

(ii) Történeti okokból a komplex függvénytanban szokás a ”differenciálható” helyett a ”holomorf” szót használni; mi kerüljük ezt az elnevezést.

1.6. A komplex függvényeket, ellentétben a valós függvényekkel, nem tudjuk a grafikonjukkal szemléltetni. Azt szoktuk lerajzolni, hogy mibe visz át a komplex függvény egy alkalmasan választott görbesereget, amely behálózza az értelmezési tartományt. Szemléltessünk most ily módon néhány egyszerű függvényt!

a) A Sin függvény. Az ismert azonosságok alapján (Analízis III.A.25.)

$$\mathrm{Sin}\,(x + iy) = \mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,iy + \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,iy = \sin x\,\mathrm{ch}\,y + i\cos x\,\mathrm{sh}\,y$$

ha x és y valós szám.

Rögzítsük x-et; a fenti képlet alapján világos, hogy az $\{x + iy|\ y \in \mathbb{R}\}$ ”függőleges” egyenesnek a Sin általi képe

– a képzetes tengely, ha $x = 0$;

– az $[1, \infty[$ félegyenes, ha $x = \pi/2$;

– a $]-\infty, -1]$ félegyenes, ha $x = -\pi/2$;

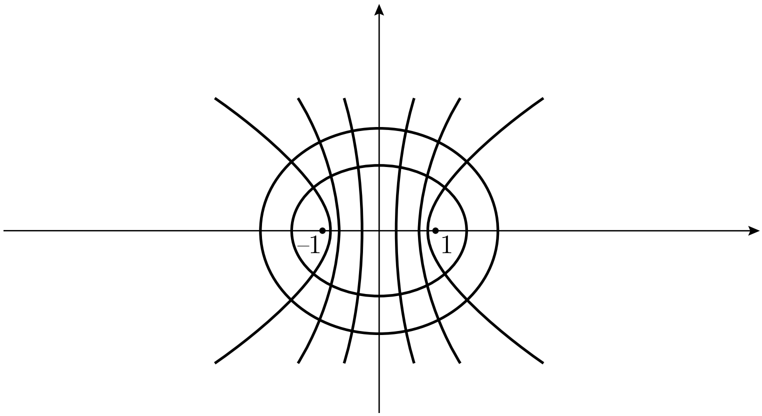
– olyan hiperbolaág, amelynek a fókuszai $(-1, 0)$ és $(1, 0)$, ha $-\pi/2 < x/2 < \pi/2$, $x \neq 0$.

Rögzítsük y-t; ekkor az $\{x + iy|\ x \in \mathbb{R}\}$ ”vízszintes” egyenesnek a Sin általi képe

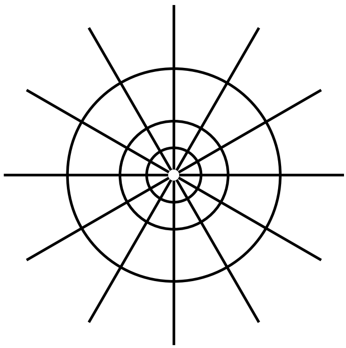
– a $[-1, 1]$ intervallum, ha $y = 0$;

– olyan ellipszis, amelynek fókuszai $(-1, 0)$ és $(1, 0)$; ha $y \neq 0$.

Jegyezzük meg, hogy a konform leképezés szabályai szerint a hiperbolák és az ellipszisek merőlegesen metszik egymást (lásd az 1. ábrát).



1. ábra



2. ábra

b) Az Exp függvény. Tudjuk, hogy

$$\operatorname{Exp}(x+iy) = \operatorname{Exp} x \operatorname{Exp} iy = e^x\, e^{iy}$$

minden x és y valós számra. Az előzőhöz hasonlóan láthatjuk, hogy a függőleges egyenesek képei az origó körüli körök, a vízszintes egyenesek képei az origóból induló félegyenesek (lásd a 2. ábrát).

1.7. Feladatok

1. Mutassuk meg a Cauchy–Riemann-egyenletek segítségével, hogy a komplex konjugálás, a valós rész képzés és a képzetes rész képzés mint $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvények nem differenciálhatók.

2. Szemléltessük a Cos, Ch, és Sh függvényeket.

3. Szemléltessük az $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^2$ és az $1/\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ függvényt alkalmas görbesereggel.

4. Szemléltessük a $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ halmazon értelmezett

$$z \mapsto \frac{z}{(1+z)^2} \quad \text{és} \quad z \mapsto \operatorname{Ln}\frac{1}{1-z}$$

függvényeket.

5. Legyen a, b, c és d adott komplex szám, $c \neq 0$ és $ad - bc \neq 0$. Igazoljuk, hogy az

$$\frac{a\mathrm{id}_{\mathbb{C}} + b}{c\mathrm{id}_{\mathbb{C}} + d},$$

úgynevezett lineáris törtfüggvény injektív , és adjuk meg az inverzét. Bizonyítsuk be továbbá, hogy a lineáris törtfüggvény körtartó.

6. Szemléltessük az $\frac{1}{2}\left(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} + \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}}\right)$, úgynevezett Zsukovszkij-féle függvényt. Keressük meg azt a legbővebb halmazt, amelyen injektív, és adjuk meg az inverzét.

2. Görbementi integrálás

2.1. A differenciálható komplex függvények tulajdonságairól közvetlenül a differenciálhatóság definíciója alapján nem sokkal többet mondhatunk, mint az előző fejezetben. Az integrálás segítségével azonban igen mélyre hatolhatunk a differenciálható függvények tulajdonságainak megismerésében.

Emlékeztetünk a **szakaszos peremes görbe** definíciójára (Analízis IV.A.12.4.): a komplex számsík G részhalmazát szakaszos peremes görbének hívjuk, ha van olyan $[a, b]$ intervallum és $p : [a, b] \to \mathbb{C}$ leképezés (a görbe paraméterezése), hogy

(i) $\operatorname{Ran}(p) = G$;

(ii) p szakaszosan folytonosan differenciálható (tehát egyben folytonos is);

(iii) $\dot{p}(t) \neq 0$ minden olyan $t \in [a, b]$ esetén, ahol p differenciálható;

(iv) p injektív (ezért az inverze is folytonos, minthogy p értelmezési tartománya kompakt).

A szakaszos peremes görbe perempontjai egyértelműen meg vannak határozva: bármely paraméterezésében a paraméter-intervallum végpontjainak megfelelő pontok.

A G részhalmaz pedig **zárt szakaszos görbe**, ha durván szólva olyan görbe, amelynek a két végpontja egybeesik (nincs pereme); azaz van az (i)–(iii) tulajdonságokkal rendelkező paraméterezése, amelyre még az is teljesül, hogy

(iv)' p leszűkítése $]a, b[$-re injektív és az inverze is folytonos,

(v)' $p(a) = p(b)$.

2.2. Idézzük fel, mit jelent egy szakaszos (zárt) görbe irányítása, és az irányított görbe: megadjuk a görbe azonosan irányított paraméterezéseinek egy osztályát (azaz elég megadni egy paraméterezést, amely már meghatározza, mit nevezünk pozitív irányításnak).

Nem zárt irányított szakaszos peremes görbének a pereme egyértelműen meghatározott kezdő- és végpontból áll.

A továbbiakban mindig irányított szakaszos peremes görbékkel és irányított szakaszos zárt görbékkel foglalkozunk; az egyszerűbb szóhasználat érdekében ezek helyett rövideny **görbét** illetve **zárt görbét** mondunk.

2.3. Az a középpontú és r sugarú körív,

$$C_r(a) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r \}$$

zárt görbe. Irányítását "az óramutató járásával ellentétesen" adjuk meg, vagyis a

$$[-\pi, \pi] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto a + re^{it}$$

paraméterezéssel.

A körvonalon **belüli** rész az a középpontú és r sugarú nyílt körlap, $K_r(a) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r \}$, a körvonalon **kívüli** rész pedig a $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a| > r \} = \overline{K_r(a)}^{\flat}$ halmaz.

Hogyan tudjuk egy bármilyen G zárt görbe esetén definiálni a a görbén belüli, illetve kívüli részt? A zárt görbe kompakt halmaz (mert kompakt intervallum folytonos képe), tehát korlátos és zárt. Ezért benne van egy 0 középpontú, r sugarú körlapban, és a komplementere nyílt, amely esetleg összefüggő, esetleg nem. Mindenképpen előáll **összefüggő komponensek**, azaz diszjunkt összefüggő nyílt halmazok uniójaként. Az összefüggő $\mathbb{C} \setminus \overline{K_r(0)}$ halmaz benne van G komplementerében, ezért G komplementerének egyetlen összefüggő komponense tartalmazza $\mathbb{C} \setminus \overline{K_r(0)}$ -t, ami azt jelenti, hogy G komplementerének egyetlen nem korlátos komponense van; ezt hívjuk a görbén **kívüli** résznek. A többi komponens a görbén **belüli** rész. Vegyük észre, az eddigiek alapján semmi sem biztosítja, hogy a görbén belüli rész nem üres vagy azt, hogy ez egyetlen összefüggő halmaz. Nem is törődünk most ezzel; a gyakorlatban előforduló konkrét görbék esetén konkrétan meg tudjuk adni a görbén belüli részt is.

2.4. Végül emlékeztetünk az irányított görbék vektori Lebesgue-mértékére (Analízis V.B.20.4.). Ha $\mathbf{V}$ véges dimenziós komplex vektortér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ folytonos függvény, G pedig irányított (zárt) görbe az f értelmezési tartományában, akkor az f integrálja a G görbére

$$\int\limits_G f := \int\limits_G f(w)\,dw := \int_a^b f(p(t))\dot{p}(t)\,dt,$$

ahol $p : [a, b] \to \mathbb{C}$ a G tetszőleges pozitív irányítású paraméterezése.

Állítás *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós komplex vektortér,* $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ *folytonosan differenciálható függvény, és* G *irányított görbe az* f *értelmezési tartományában. Jelölje* k *és* v *a görbe kezdő, illetve végpontját* ($v := k$*, ha a görbe zárt). Ekkor*

$$\int\limits_G f' = f(v) - f(k).$$

Bizonyítás Vegyük a görbe egy p pozitív irányítását, amely az $[a, b]$ intervallumon van értelmezve. Ekkor $k = p(a)$ és $v = p(b)$, továbbá a közvetett függvény deriválási szabálya valamint a Newton–Leibniz-formula szerint

$$\int\limits_G f' = \int_a^b f'(p(t))\dot{p}(t)\,dt = \int_a^b (f \circ p)^{\cdot}(t)\,dt = f(p(b)) - f(p(a)). \ \blacksquare$$

Jegyezzük meg, hogy ha a görbe zárt, akkor az integrál nulla.

2.5. Legyen $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$. Rögzített $z \in \mathbb{C}$ esetén az $(id_{\mathbb{C}} - z)^{n+1}$ függvény deriváltja $(n + 1)(id_{\mathbb{C}} - z)^n$. Ezért, ha G zárt görbe, akkor

$$\int\limits_G (w - z)^n dw = 0 \qquad (z \in \mathbb{C},\ n = 0, 1, 2, ...),$$

$$\int\limits_G \frac{dw}{(w - z)^n} = 0 \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus G,\ n = 2, 3, ...).$$

2.6. Feladatok

1. Paraméterezzük a következő görbéket:

(i) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| = 1\, \mathrm{Im}\, z \geq 1\}$;

(ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2 \leq 1\}$.

2. Integráljuk az előző görbékre a Cos, az Exp és az $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^2$ függvényeket a 2.4. állítás felhasználása nélkül.

3. Adjuk meg a következő zárt görbék pontos matematikai értelmezését az "óramutató járásával ellentétes" irányítású paraméterezéssel, és írjuk le a görbéken belüli részt.

(i) Sokszögvonal: olyan görbe, amely egyenesszakaszokból áll.

(ii) Körszeletvonal: egy kör húrjából és az egyik hozzá tartozó körívből áll.

(iii) Körcikkvonal: egy kör két sugarából és a közbezárt körívből áll.

(iv) Körgyűrűcikk-vonal: két koncentrikus kör két sugarának a körvonalak közé eső része és a közbezárt körívek alkotják.

4. Vegyük egy C kör egy húrját, és az általa meghatározott két körszeletvonalat, K_1-et és K_2-t. Irányítsuk mindkettőt az "óramutató járásával ellentétesen". Mutassuk meg, hogy ha f olyan folytonos függvény, amely értelmezve van mindkét körszeletvonalon, akkor

$$\int_{K_1} f + \int_{K_2} f = \int_{C} f \,.$$

3. Az indexfüggvény

3.1. Nincs olyan függvény, amelynek $1/\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ a differenciálhányadosa volna. Azt tudjuk, hogy az Ln függvény a nullán kívül mindenütt értelmezve van, de a negatív valós tengely mentén nem folytonos; mindenütt másutt differenciálható is és a differenciálhányadosa megegyezik az $1/\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ függvénnyel. Vagyis csak az $\frac{1}{id_{\mathbb{C}}}\Big|_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-}$ differenciálhányadosa egy függvénynek. Ezért nem állíthatjuk, hogy az előbbi pont utolsó formulájában akkor is nulla áll, ha $n = 1$.

Definíció *Legyen G zárt görbe. Ekkor az*

$$\mathrm{Ind}_G(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{dw}{w - z} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus G)$$

függvényt a G ***indexfüggvényének*** *nevezzük.*

3.2. Állítás *Ind_G egész értékű függvény, amely konstans a $\mathbb{C} \setminus G$ összefüggő komponensein, és a G-n kívüli részen a 0 értéket veszi fel.*

Bizonyítás Legyen p a G paraméterezése, amely az $[a, b]$ intervallumon van értelmezve. Ekkor

$$\mathrm{Ind}_G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\dot p(t)}{p(t)-z}\,dt.$$

Tudjuk, hogy n akkor és csak akkor egész, ha $e^{i2\pi n} = 1$. Ezért $\mathrm{Ind}_G(z) \in \mathbb{Z}$ egyenértékű azzal, hogy $\phi(b) = 1$, ahol

$$\phi(s) := \mathrm{Exp}\left[\int_a^s \frac{\dot p(t)}{p(t)-z}\,dt\right] \qquad (s \in [a, b]).$$

ϕ véges sok pontot kivéve differenciálható, és

$$\dot\phi(s) = \phi(s)\,\frac{\dot p(s)}{p(s)-z}\,,$$

amiből arra következtetünk, hogy $\phi/(p - z)$, amely az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény, véges sok pontot kivéve differenciálható, és a differenciálhányadosa zérus. Ez azt jelenti, hogy a függvény konstans, tehát

$$\frac{\phi(b)}{p(b)-z} = \frac{\phi(a)}{p(a)-z}.$$

Mivel $\phi(a) = 1$ és $p(a) = p(b)$, fennáll, hogy $\phi(b) = 1$, vagyis az indexfüggvény értékei valóban egész számok.

Rögzített $z \in \mathbb{C} \setminus G$ esetén legyen $\rho := \frac{1}{2}d(z, G)$ (z és G távolságának a fele). Ekkor minden $s \in [a, b]$ és $u \in K_\rho(z)$ esetén $|p(s) - u| \geq \rho$, és lévén $\dot p$ korlátos függvény, van olyan $L > 0$, hogy $|\dot p(s)| \leq L$. Ezeket összetéve azt kapjuk, hogy

$$\left|\frac{\dot p(s)}{p(s)-u}\right| \leq \frac{L}{\rho} \qquad (s \in [a, b]), u \in K_\rho(z)).$$

A konstans függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ezért a paraméteres integrálokra vonatkozó tétel szerint (Analízis V.B.11.3.) Ind_G folytonos függvény. Tudjuk, hogy folytonos függvény összefüggő halmazt összefüggő halmazba képez; ezért az indexfüggvény (lévén az értékei egész számok) a G komplementerének összefüggő komponensein konstans.

Végül, $|\mathrm{Ind}_G(z)| < 1$, ha z és G távolsága nagyobb, mint $L|b - a|/2\pi$, ami azt jelenti, hogy az indexfüggvény (lévén az értékei egész számok) nulla a görbén kívüli részen.

3.3. Az a középpontú, r sugarú körvonal szokásos paraméterezésére $p(t) = a + re^{it}$ és $\dot p(t) = ire^{it}$, ahol $t \in [-\pi, \pi]$. Ezért könnyű számolással kapjuk, hogy a kör középpontjában az indexfüggvény értéke 1, amiből azonnal következik, hogy a körvonal indexfüggvénye 1 a körön belül és 0 a körön kívül:

$$\mathrm{Ind}_{C_r(a)}(z) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |z-a| < r \\ 0, & \text{ha } |z-a| > r. \end{cases}$$

3.4. Vegyük egy C kör egy húrja által meghatározott K_1 és K_2 körszeletvonalat. A 2.6.4. feladat szerint, ha $z \notin K_1 \cup K_2$, akkor $\mathrm{Ind}_{K_1}(z)+\mathrm{Ind}_{K_2}(z) = \mathrm{Ind}_C(z)$. A K_1-en belüli rész a K_2-n kívül van, tehát K_2 indexfüggvénye nulla a K_1-en belüli részen, és persze a két görbe szerepe felcserélhető. Ezért az előző eredményünk alapján megállapíthatjuk, hogy egy körszeletvonal indexfüggvénye 1 a vonalon belül és 0 a vonalon kívül.

Teljesen hasonló gondolatmenettel bizonyíthatjuk be, hogy egy körcikkvonal indexfüggvénye 1 a vonalon belül és 0 a vonalon kívül.

Egy háromszögből és két körszeletből összetehetünk egy másik körszeletet. Az előbbi gondolatmenet három görbére való általánosításával beláthatjuk, hogy egy háromszögvonalra is érvényes: az indexfüggvénye 1 a vonalon belül és 0 a vonalon kívül.

Egy sokszög megfelelően összetehető háromszögekből, ezért az előzőekhez hasonlóan megállapíthatjuk, hogy egy sokszögvonal indexfüggvénye is 1 a vonalon belül és 0 a vonalon kívül.

3.5. Feladatok

1. Adjuk meg egy olyan zárt görbe indexfüggvényét, amely két, nem szükségképpen azonos sugarú körívből áll.

2. Mutassuk meg, hogy egy körgyűrűcikk-vonal indexfüggvénye 1 a vonalon belül, 0 a vonalon kívül.

3. Mi az indexfüggvénye annak a görbének, amely négy azonos sugarú, egymást kívülről érintő negyedkörvonalból áll?

4. Milyen lehet az a zárt görbe, amelynek indexfüggvénye a görbén belül -1? (Figyelem: a görbe fogalmába most mindig beleértjük az irányítást is!)

4. A Cauchy-féle alaptétel

E könyv további részében **V** véges dimenziós vektorteret jelöl. Eredményeink általánosíthatók arra az esetre is, amikor **V** Banach-tér, de a Banach-tér értékű függvények integrálásának pontos elméletét nem tárgyaltuk.

4.1. Állítás *(**Goursat lemmája**) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ differenciálható függvény, T zárt háromszög az f értelmezési tartományában. Jelölje ∂T a háromszög határát (vagyis a háromszögvonalat). Ekkor*

$$\int_{\partial T} f = 0.$$

Bizonyítás Felezzük meg a háromszög oldalait, és így bontsuk fel a háromszöget négy kisebb, egybevágó zárt háromszögre. Minden háromszögvonalat az "óramutató járásával ellentétesen" irányítunk. Ekkor f integrálja az eredeti háromszögvonalra – nevezzük át most ezt T_0-nak – egyenlő a négy kis háromszögvonalra vett integálok összegével (a középvonalakra vett integrál az összegzésnél kiesik, mert mindkét irányban szerepel integrálás). Válasszuk ki a négy kis háromszög közül azt (egy olyant), amelyiknek a határán f integráljának a normája (egy akárhogyan választott normára) nem kisebb a többinél; jelölje ezt T_1. Tehát

$$\left\| \int_{\partial T} f \right\| \leq 4 \left\| \int_{\partial T_1} f \right\|.$$

Az előzőekhez hasonlóan T_1-et is négy részre oszthatjuk, és hasonlóképp kiválaszthatjuk e négy rész közül a T_2-vel jelölt háromszöget. Ezután T_2-t is négy részre osztjuk és így tovább ... .

Megadhatunk tehát $T_n \quad (n \in \mathbb{N})$ zárt háromszögeket úgy, hogy minden n-re

(i) $T_{n+1} \subset T_n$;

(ii) $\operatorname{diam} T_n = \operatorname{diam} T / 2^n \,, \quad |\partial T_n| = |\partial T| / 2^n \,,$

ahol diam az átmérőt jelenti, $|\ |$ pedig a vonalhosszat (kerületet);

(iii)

$$\left\| \int_{\partial T} f \right\| \leq 4^n \left\| \int_{\partial T_n} f \right\|.$$

A háromszögek olyan kompakt halmazok monoton csökkesnő sorozata, amelyek átmérőinek sorozata a nullához tart. Ezért közös részük egyetlen elem (Analízis III.A.3.10.3.):

$$\bigcap_n T_n = \{z_0\}\,.$$

Az f függvény differenciálható z_0-ban, ezért van a z_0-nak olyan $K(z_0)$ környezete, hogy

$$f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) = \big(\alpha(z - z_0)\big)(z - z_0) \qquad (z \in K(z_0)),$$

ahol $\lim\limits_{z \to z_0} \alpha(z - z_0) = 0$.

Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik

– a z_0-nak olyan $K_\epsilon(z_0)$ környezete, amely része $K(z_0)$-nek, és minden $z \in K_\epsilon(z_0)$ esetén $\|\alpha(z - z_0)\| < \epsilon$;

– olyan $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_\epsilon$ esetén $T_n \subset K_\epsilon(z_0)$.

Ha tehát n nagyobb az n_ϵ-nál, akkor

$$\int\limits_{\partial T_n} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial T_n} \big(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\big)\,dz + \int\limits_{\partial T_n} \big(\alpha(z - z_0)\big)(z - z_0)\,dz.$$

A jobb oldalon az első integrandus a $z \mapsto f(z_0)z + \frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2$ függvény differenciálhányadosa, ezért az integrál értéke nulla. A jobb oldal második integráljának normáját pedig felülről becsülhetjük $\epsilon\,\mathrm{diam}T_n\,|\partial T_n|$-nel.

Korábban az (ii) és (iii) alatt összefoglalt tulajdonságok alapján tehát azt kapjuk, hogy

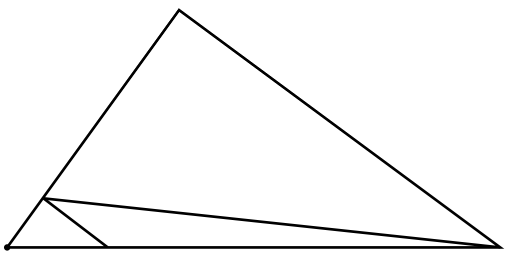
$$\left\| \int\limits_{\partial T} f \right\| \leq \epsilon\,\mathrm{diam}T\,|\partial T|,$$

és ezzel bebizonyítottuk, amit akartunk.

4.2. Egy kicsit erősíthetjük az előbbi állítást úgy, hogy f legyen korlátos és egy a pontot kivéve differenciálható.

Ha ugyanis a a zárt háromszögön kívül van, érdektelen.

Ha a a háromszög egyik csúcsa, akkor – kizárva azt a triviális esetet, amikor f nulla a háromszögön – minden $\epsilon > 0$ esetén fel lehet osztani a háromszöget három háromszögre a 3. ábrán látható módon úgy, hogy az a csúcsnál levő kis háromszög kerülete kisebb legyen, mint ϵ/M, ahol $M > 0$ az $\|f\|$ maximuma az eredeti háromszögön. Az eredeti háromszögvonalra vett integrál megegyezik a három háromszögvonalra vett integrál összegével, amelyek közül kettő nulla, a harmadik pedig kisebb ϵ-nál.



3. ábra

Ha a a háromszög belsejében van, akkor a háromszöget felbonthatjuk három olyan háromszögre, amelyek mindegyikének egyik csúcsa az a pont.

A következőkben gyakran használjuk az $[u,v]$ jelölést az u és v komplex szám közötti u-tól v felé irányított egyenesszakaszra: $[u,v] := \{u+\lambda(v-u) \mid 0 \le \lambda \le 1\}$.

4.3. Állítás *(**Cauchy tétele**) Legyen D csillagszerű nyílt halmaz $\mathbb{C}$-ben, $f : D \to \mathbf{V}$ folytonos, egy pontot kivéve differenciálható. Ekkor van olyan $F : D \to \mathbf{V}$ differenciálható függvény, hogy $f = F'$.*

Bizonyítás Legyen c csillagközpont, és

$$F(z) := \int_{[c,z]} f \qquad (z \in D).$$

Vegyünk tetszőleges z-t D-ből. Van olyan $r > 0$, hogy z-nek az r sugarú környezete benne van D-ben. Legyen ezután h olyan, hogy $|h| < r$; ekkor természetesen $z + h \in D$. Tekintsük a $[c,z], [z,z+h]$ és $[z+h,c]$ egyenesszakaszokat. Ha $z = c$ vagy $z \neq c$ de h párhuzamos $(z-c)$-vel, akkor az egyenesszakaszok párhuzamosak, egyébként egy háromszög oldalai. Az első esetben triviálisan, a második esetben Goursat lemmája miatt

$$\int_{[c,z]} f + \int_{[z,z+h]} f + \int_{[z+h,c]} f = 0\,,$$

ami átfogalmazva így szól:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f\,.$$

Mivel

$$f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(z),$$

azt kapjuk, hogy

$$\left\| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right\| = \left\| \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} \big(f(w) - f(z)\big) dw \right\|$$
$$\le \max\{\|f(w) - f(z)\| \,:\, |w-z| \le |h|\}.$$

A jobb oldalon álló kifejezés f folytonossága miatt a nullához tart, miközben h a nullához tart, és ezzel állításunkat be is bizonyítottuk. ■

4.4. Abban az esetben, amikor $\mathbf{V} = \mathbb{C}$, akkor Cauchy alaptétele folytonosan differenciálható függvényekre következik a Cauchy–Riemann-egyenletekből és abból, hogy egy $\mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható függvény egy $\mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény deriváltja, ha az értelmezési tartománya csillagszerű és a deriváltja szimmetrikus (Analízis V.B.11.5.).

Vegyük ugyanis az $f = f_1 + if_2 : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható függvényt, és legyen $g := (f_1, -f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^2, h := (f_2, f_1) : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^2$. Ekkor a Cauchy–Riemann-egyenletek szerint mind g, mind h deriváltja szimmetrikus: $\partial_1 g_2 = \partial_2 g_1$, $\partial_1 h_2 = \partial_2 h_1$. Ezért létezik $F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ és $F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ úgy, hogy $\mathrm{D}F_1 = g$ és $\mathrm{D}F_2 = h$. Más szóval ez azt jelenti, hogy $\partial_1 F_1 = \partial_2 F_2 = f_1$, $\partial_1 F_2 = -\partial_2 F_1 = f_2$, vagyis az $F := F_1 + iF_2$ komplex függvényre $F' = f$ teljesül.

4.5. Cauchy alaptételének közvetlen következménye – és szokták ezt a következményt is Cauchy alaptételének nevezni –, hogy ha $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ differenciálható, és G olyan zárt görbe, amely benne van az f értelmezési tartományának egy csillagszerű nyílt részhalmazában, akkor

$$\int_G f = 0.$$

4.6. Feladatok

1. Adjunk meg egy olyan $\mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ differenciálható függvényt, amely nem deriváltja egy másik függvénynek. Szűkítsük le a függvényt egy csillagszerű tartományra, és keressünk egy olyan függvényt, amelynek a differenciálhányadosa ezen a csillagszerű tartományon.

2. Van-e olyan $\mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ differenciálható függvény, amelynek az értelmezési tartománya nem csillagszerű, mégis egy másik függvény differenciálhányadosa?

5. Cauchy formulája

5.1 Állítás (***Cauchy formulája***) *Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy D csillagszerű nyílt halmaz az f értelmezési tartományában, és G zárt görbe D-ben. Ekkor*

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f(w)}{w - z}\, dw \qquad (z \in \mathrm{Dom} f \setminus G).$$

Bizonyítás Rögzített z esetén a

$$D \to \mathbf{V}\,, \quad w \mapsto \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,, & \text{ha } w \neq z \\ f'(z)\,, & \text{ha } w = z \end{cases}$$

függvény folytonos, és a z pontot kivéve differenciálható, tehát a Cauchy-féle alaptétel miatt a G-re vett integrálja nulla; minthogy z nincs rajta a görbén, a függvénynek csak a $z \neq w$ helyen vett értékei számítanak, azaz

$$\int_G \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = 0\,,$$

amiből egyszerű átrendezéssel megkapjuk a kívánt eredményt. ■

Cauchy formulájának szinte hihetetlen következményei vannak, amint azt a továbbiakban meglátjuk.

5.2. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ differenciálható függvény, és a akármilyen pont az f értelmezési tartományában. Ekkor van az a körül egy nyílt körlap, amely teljes egészében $\mathrm{Dom} f$ része. Ha r e körlap sugaránál kisebb pozitív szám, akkor az a körüli, r sugarú körvonalra alkalmazhatjuk Cauchy formuláját, és azt kapjuk, hogy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \qquad (z \in K_r(a)),$$

ahol $K_r(a)$ jelöli az a körüli r sugarú nyílt körlapot.

Ez azt jelenti, hogy a függvény értékeit a körlapon (a körvonalon belül) meghatározzák a körvonalon felvett értékei.

5.3. Állítás *Ha $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ differenciálható, akkor végtelen sokszor differenciálható, és bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw \qquad (z \in K_r(a)).$$

Bizonyítás Teljes indukciót alkalmazunk. f differenciálható, és a nulladik deriváltjára vonatkozó formula éppen Cauchy formulája. Tegyük fel, hogy n-szer differenciálható és igaz a fenti formula. Ha "bedifferenciálhatunk" az integráljel alá, akkor $n+1$-szer is differenciálható, és igaz a formula az $n+1$-edik deriváltra is. Megmutatjuk a paraméteres integrálok differenciálhatóságára vonatkozó tétellel (Analízis V.B.11.4.), hogy a "bedifferenciálás" lehetséges.

Vegyük a körvonal szokásos paraméterezését, és tekintsük a

$$K_r(a) \times [-\pi, \pi] \to \mathbf{V},\ (z,t) \mapsto \phi_n(z,t) := \frac{n!}{2\pi i}\,\frac{f(a+re^{it})\,ire^{it}}{(a+re^{it}-z)^{n+1}}$$

függvényt. Ezzel az állítás szerint $f^{(n)}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(z,t)\,dt$.

Nyilván minden z esetén $\phi_n(z,\cdot)$ integrálható a $[-\pi,\pi]$ intervallumon a Lebesgue-mérték szerint. Továbbá minden t esetén $\phi_n(\cdot\,,t)$ differenci álható, és a differenciálhányadosa a $\phi_{n+1}(\cdot\,,t))$ függvény.

Rögzítsünk egy z -t a $K_r(a)$ körlapon. A $t \mapsto \phi_{n+1}(z,t)$ hozzárendelés folytonos, tehát mérhető. Továbbá, ha $0 < \rho < (r-|z-a|)/2$, akkor minden u-ra a z-nek ρ sugarú környezetében $\|\phi_{n+1}(u,t)\| \le \frac{(n+1)!}{2\pi}\,\frac{r}{\rho^{n+2}}\,\max\limits_{C_r(a)} \|f\|$, vagyis van a függvénynek az első változójától független integrálható majoránsa; követekezésképpen az integrálás és differenciálás sorrendje felcserélhető, és ezt akartuk bizonyítani.

5.4. Állítás *Ha $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ differenciálható, akkor analitikus, azaz értelmezési tartományának bármely pontja egy környezetében a Taylor-sorával előállítható. Közelebbről, az előbbi jelölésekkel*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad (z \in K_r(a)).$$

Bizonyítás Ha z az a középpontú, r sugarú körvonalon belül van, akkor minden $w \in C_r(a)$ esetén

$$\alpha(z) := \left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \frac{|z-a|}{r} < 1,$$

ezért

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Tegyük be ezt a kifejezést az 5.2. integrandusába; az előző pont értelmében be is bizonyítottuk, amit akartunk, ha megmutatjuk, hogy az integrálás és összegzés sorrendje felcserélhető. B. Levi tételét alkalmazzuk. A körvonal szokásos paraméterezésével tehát az

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+re^{it}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(re^{it})^{n+1}} ire^{it} dt$$

összefüggésünk van, és azt kell megmutatnunk, hogy az integrandusok normáinak integráljai felösszegezhetők. Íme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(a+reit)\| \frac{|z-a|^n}{r^{n+1}} r dt \leq 2\pi \max_{C_r(a)} \|f\| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(z)^n < \infty.$$

5.5. Az 5.3.-beli formulából azonnal kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\|f^{(n)}(a)\| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{C_r(a)} \|f\|.$$

Ebből adódik **Liouville tétele**:

Állítás *Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbf{V}$ differenciálható és korlátos, akkor állandó.*

Bizonyítás Válasszunk akárhogy egy a elemet $\mathbb{C}$-ből. Az a körüli bármekkora r sugarú kör benne van az f értelmezési tartományában, ezért

$$\|f'(a)\| \leq \frac{1}{r} \max_{C_r(a)} \|f\| \leq \frac{1}{r} \max \|f\|.$$

Mivel r akármilyen nagy lehet, ez azt jelenti, hogy $f'(a) = 0$, azaz – lévén a tetszőleges – f differenciálhányadosa a nulla-függvény, követekzésképpen f konstans.
■

Jegyezzük meg, igen fontos, hogy f mindenütt értelmezett, vagyis az egész komplex sík az értelmezési tartománya. Szokás a komplex függvénytanban egész függvénynek nevezni a mindenütt értelmezett, differenciálható függvényeket. Ezzel a szóhasználattal Liouville tétele úgy is megfogalmazható, hogy korlátos egész függvény állandó.

5.6. Ezután igen egyszerűen származtathatjuk az algebra alaptételét.

Állítás *Nem-nulladfokú komplex polinomnak van gyöke.*

Bizonyítás Legyen P nem-nulladfokú polinom, és tegyük fel, hogy nincs gyöke, azaz $P(z) \neq 0$ minden z komplex számra. Ekkor $1/P$ mindenütt értelmezett, differenciálható függvény. Tudjuk, hogy P a "végtelenhez tart a végtelenben", azaz minden $K > 0$ számhoz van olyan $R > 0$, hogy $|P(z)| > K$ ha $|z| > R$. Ezért $1/P$ korlátos: ugyanis folytonos függvény lévén, korlátos a nulla körüli R sugarú zárt körlapon, azon kívül pedig kisebb vagy egyenlő, mint $1/K$. Mindent összevetve tehát Liouville tétetele szerint $1/P$ állandó, ezért persze P is állandó, azaz nulladfokú: ellentmondásra jutottunk.

5.7. Cauchy formulája segítségével differenciálható függvények sorozatáról is érdekes megállapítást tehetünk.

Állítás *Legyen $H \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, és $f_n : H \to \mathbf{V} \quad (n \in \mathbb{N})$ differenciálható függvények lokálisan egyenletesen konvergens sorozata. Ekkor $f'_n \quad (n \in \mathbb{N})$ is lokálisan egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás Vegyük a H tetszőleges a pontját. Ennek van olyan környezete, amelyben $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens; jelölje $4r$ egy ilyen környezet sugarát. A Cauchy-féle konvergencia-kritérium szerint minden $\epsilon > 0$ esetén létezik n_ϵ úgy, hogy minden $n, m > n_\epsilon$ és minden $w \in \overline{K_{2r}(a)}$ esetén $\|f_n(w) - f_m(w)\| < \epsilon$.

Ha $w \in C_{2r}(a)$ és $z \in K_r(a)$, akkor $|w - z| > r$, így

$$\frac{1}{|w-z|^2} < \frac{1}{r^2},$$

ezért

$$\|f'_n(z) - f'_m(z)\| = \frac{1}{2\pi}\left\| \int_{C_r(a)} \frac{f_n(w) - f_m(w)}{(w-z)^2} dw \right\| \le \frac{\epsilon}{r} \qquad (n, m > n_\epsilon, z \in K_r(a)),$$

ami azt jelenti, hogy $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az a körüli r sugarú körben egyenletesen konvergens, és ez elég. ■

Eredményünk egyszerű következménye, hogy differenciálható $\mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ függvények lokálisan egyenletesen konvergens sorozatának határértéke is differenciálható (Analízis IV.A.4.2.).

6. Laurent tétele

6.1. Most olyan függvényekkel fogunk foglalkozni, amelyek egy ”kipontozott környezetben” differenciálhatók, azaz egy olyan körlapon, amelyből a középpont ki van véve. Ilyen pl az $1/\mathrm{id}_\mathbb{C}$ függvény.

Definíció *Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ differenciálható függvénynek az $a \in \mathbb{C}$* ***izolált szingularitása****, ha $a \notin \mathrm{Dom} f$, de a-nak van olyan $K(a)$ környezete, hogy $K(a) \setminus \{a\}$ benne van f értelmezési tartományában.*

Állítás *(**Laurent tétele**) Legyen a az $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ izolált szingularitása. Ha $r > 0$ olyan, hogy $\overline{K_r(a)} \setminus \{a\} \subset \mathrm{Dom} f$, akkor*

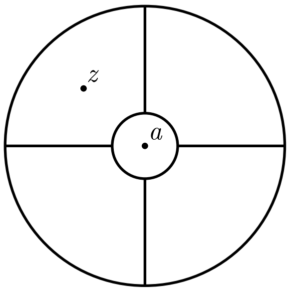
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in K_r(a) \setminus \{a\}),$$

ahol

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \qquad (n \in \mathbb{Z}). \qquad (*)$$

A sor abszolút és egyenletesen konvergens minden a $K_r(a) \setminus \{a\}$-ban levő körgyűrűben, és az együtthatók egyértelműen meghatározottak.

Bizonyítás Rögzítsünk egy z-t $K_r(a) \setminus \{a\}$-ban. Vegyük az a körüli ρ sugarú körív és az r sugarú körív által meghatározott G_1, G_2, G_3 és G_4 körgyűrűcikk-vonalat, ahogy a 4. ábrán látjuk.



4. ábra

Van olyan $\alpha > 0$, hogy $K_{r+\alpha}(a) \setminus \{a\}$ is benne van f értelmezési tartományában, ezért mind a négy görbe belefoglalható egy-egy csillagszerű nyílt halmazba, amely $\mathrm{Dom} f$ része (lásd az 1. feladatot). Alkalmazhatjuk tehát Cauchy formuláját:

$$f(z) \mathrm{Ind}_{G_k}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_k} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Mivel egyrészt

$$\sum_{k=1}^{4} \mathrm{Ind}_{G_k}(z) = 1,$$

másrészt, ha összeadjuk a négy görbére vett integrált, akkor a körvonalakra vett integrálok különbségét kapjuk, arra az eredményre jutunk, hogy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Az első integrálnál ugyanazt az átalakítást követjük, mint 5.4.-ben, és így azt találjuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

ahol c_n-et a $(*)$ formula adja $n = 0, 1, 2, ...$ esetére.

A második integrálnál is hasonlóan járunk el, csak most azt használjuk ki, hogy $w \in C_\rho(a)$ esetén $\frac{|w-a|}{|z-a|} < 1$, tehát

$$-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(z-a)-(w-a)} = \frac{1}{z-a} \frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(w-a)^m}{(z-a)^{m+1}}.$$

Mint az előzőekben, az összegzés és az integrálás sorrendje most is felcserélhető, és így azt kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho(a)} f(w)(w-a)^m \, dw \right) \frac{1}{(z-a)^{m+1}}.$$

A jobb oldalon az integrandus differenciálható a $K_r(a) \setminus \{a\}$ halmazon, ezért a G_k görbékre vett integrálja nulla; nulla a négy görbére vett integrál összege is, ami viszont épp a szóban forgó körvonalra vett integrálok különbsége. A fenti formulában tehát $C_\rho(a)$ helyett integrálhatunk $C_r(a)$-ra; az $n := -(m+1)$ jelöléssel végül is azt írhatjuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n,$$

ahol c_n-et a $(*)$ formula adja $n = -1, -2, ...$ esetére.

A sor abszolút konvergenciáját megmutattuk és fel is használtuk B. Levi tételének alkalmazásához. Az egyenletes konvergencia pedig Weierstrass kritériumából következik: ha $0 < r_1 < r_2 < r$, akkor az abszolút konvergencia miatt $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r_2^n < \infty$ és $\sum_{n=-1}^{-\infty} |c_n| r_1^n < \infty$, ezért a $\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-a| < r_2\}$ halmazon a sor egyenletesen konvergens.

Már csak az maradt hátra, hogy megmutassuk az együtthatók egyértelműségét. Íme: tegyük fel, hogy f előállítható az állításban szereplő sor alakjában valamely $b_n (n \in \mathbb{Z})$ együtthatókkal. Ekkor

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(a)} \frac{\sum_{m\in\mathbb{Z}} b_m (w-a)^m}{(w-a)^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m\in\mathbb{Z}} b_m \int\limits_{C_r(a)} (w-a)^{m-n-1} dw = b_n.$$

Itt megint B. Levi tétele miatt cserélhettük fel az integrálás és az összegzés sorrendjét; az összeg alatt minden integrál értéke nulla, kivéve az $m = n$ esetet, amikor $2\pi i$ (lásd 3.3.). ■

Az állításban szereplő sort az f függvény a **körüli Laurent-sorának** nevezzük.

6.2. Definíció *Legyen a az $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ izolált szingularitása. Azt mondjuk, hogy f-nek az a-ban*
(i) ***megszüntethető szingularitása*** *van, ha az a körüli Laurent-sorában az összes negatív indexű együttható nulla;*
(ii) ***pólusa*** *van, ha az a körüli Laurent-sorában csak véges sok negatív indexű együttható nem nulla; közelebbről, m-**edrendű pólusa** van, ha a $-m$-edik együttható nem nulla, de minden $-m$-nél kisebb indexű együttható nulla ($m \geq 1$);*
(iii) ***lényeges szingularitása*** *van, ha az a körüli Laurent-sorában végtelen sok negatív indexű együttható nem nulla.*

Megjegyzések (i) A megszüntethető szingularitást **nulladrendű pólusnak** is szokás nevezni.

(ii) Legyen a az f-nek izolált szingularitása.

A Laurent-sorból jól látszik, hogy ha a szingularitás megszüntethető, akkor f-nek van határértéke a-ban. Ebben az esetben az

$$f(a) := c_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(a)} \frac{f(w)}{w-a} dw = \lim_{z\to a} f(z)$$

értelmezéssel az f függvény differenciálható lesz az a egy egész környezetén (hiszen hatványsor alakjában áll elő), azaz "megszüntettük a szingularitást".

Ugyancsak egyszerű, hogy ha a szingularitás pólus, akkor f-nek nincs határértéke a-ban; általánosított értelemben végtelen a határértéke.

Be lehet bizonyítani, hogy ha a szingularitás lényeges, akkor $\mathbf{V} = \mathbb{C}$ esetén a szingularitás bármely környezetében felvett függvényértékek között legfeljebb egy kivételével minden komplex szám szerepel. Ez azt is maga után vonja, hogy ekkor nincs f-nek sem véges, sem végtelen határértéke a-ban.

(iii) Ha tehát f differenciálható valamely a egy környezetében, és f folytonos a-ban, akkor f differenciálható is a-ban. Valóban, ha a-t kivesszük az értelmezési tartományból, akkor f-nek a-ban izolált szingularitása van; viszont van határértéke, tehát a szingularitás megszüntethető, mégpedig éppen a függvény a-beli határértékével, ami viszont most pontosan $f(a)$.

Ezért a Goursat-lemma "javítása" (lásd 4.2.) valójában nem erősebb az eredeti megfogalmazásnál, de az akkori tudásunk szintjén mégis szükségünk volt rá, hogy továbbléphessünk.

6.3. A fügvény és a differenciálhányadosai nincsenek értelmezve a-ban, ezért az a körüli Laurent-sorban szereplő együtthatók még pozitív indexek esetén sem származtathatók differenciálásból (kivéve persze a megszüntethető szingularitást), noha formailag olyan integrálokkal vannak meghatározva, mint a Taylor-sorban szereplő együtthatók.

Az együtthatókra felírt integrál-képlet csak elvi jelentőségű, kiszámításuk általában reménytelen feladat.

Hogyan határozzuk meg hát egy függvény Laurent-sorát? Persze általános szabály nincs, de vannak bizonyos esetekben jól alkalmazható módszerek. Ezek közül vesszük most a legfontosabbakat.

(i) Először is említsük meg, hogy ha a $h : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ és a $g : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ függvénynek izolált szingularitása van a-ban, akkor $(h+g)$-nek is, és $h+g$ Laurent-sora a h és g Laurent-sorának összege. Ez jól alkalmazható úgy, hogy a szóban forgó f függvényt előállítjuk $h+g$ alakban, ahol mind h mind g Laurent-sorát valahogy már könnyebb származtatni.

Példaként tekintsük a $z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$ függvényt. Ennek i-ben és $-i$-ben elsőrendű pólusa van. Parciális törtekre bontással könnyen azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right).$$

Vegyük például az i-beli szingularitást. A fenti első függvény differenciálható i-ben, a második pedig az i körüli Laurent-sorának egyetlen negatív indexű tagját explicite megadja. Tehát a Laurent-sor előállításához nem kell egyebet tennünk, mint i körül Taylor-sorba fejteni a $z \mapsto 1/(z+i)$ függvényt.

(ii) Hasonlóan, ha a $h : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ és a $g : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ függvénynek izolált szingularitása van a-ban, akkor hg-nek is, és hg Laurent-sora a h és g Laurent-sorának szorzata, amelyet – lévén a sorok abszolút konvergensek – a Cauchy-szorzattal számíthatunk. Ez is jól alkalmazható úgy, hogy a szóban forgó f függvényt előállítjuk hg alakban, ahol mind h, mind g Laurent-sorát valahogy már könnyebb származtatni.

(iii) Ha a $g : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ differenciálható függvénynek a-ban m-szeres nullahelye van (azaz $g^{(k)}(a) = 0$ ha $k \leq m-1$ és $g^{(m)}(a) \neq 0$), akkor az $f := 1/g$ függvénynek a-ban m-szeres pólusa van (ami a g Taylor-sorából jól látszik), és f-nek a körüli Laurent-együtthatóit a következőképp számolhatjuk. Írjuk fel g Taylor sorát a

körül (ennek együtthatóit differenciálással származtathatjuk):

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

majd f Laurent-sorát a keresett együtthatókkal:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

A két sor szorzata a konstans 1 függvény; mivel mindkét sor abszolút konvergens, szorzatukat a Cauchy-szorzattal számíthatjuk. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_m c_{-m} &= 1, \\ a_m c_{-m+1} + a_{m+1} c_{-m} &= 0, \\ a_m c_{-m+2} + a_{m+1} c_{-m+1} + a_{m+2} c_{-m} &= 0 \end{aligned}$$

és így tovább. Ebből

$$c_{-m} = \frac{1}{a_m}, \quad c_{-m+1} = -\frac{a_{m+1}}{a_m^2}, \quad c_{-m+2} = \frac{a_{m+1}^2}{a_m^3} - \frac{a_{m+2}}{a_m^2}$$

és így tovább.

(iv) Ha $g : \mathbb{C} \to \mathbf{V}$ differenciálható függvény, akkor bármely $a \in \mathbb{C}$ esetén a $z \mapsto f(z) := g\left(\frac{1}{z-a}\right)$ függvénynek a-ban izolált szingularitása van. Írjuk fel g Taylor-sorát a 0 körül:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Az f Laurent-sorát úgy kapjuk, hogy a fenti sorban z-t kicseréljük $1/(z-a)$-val. Tehát f Laurent-sorában pozitív indexű tagok nem lesznek, és a $-n$-edik indexű együttható pontosan a_n.

6.4. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy egy középpontjától megfosztott nyílt félkörlap csillagszerű, és a Laurent-tétel bizonyításában szereplő negyed körgyűrűcikk-vonal belefoglalható egy ilyenbe.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvénynek a-ban m-szeres pólusa van, akkor 1/f kiterjeszthető az a egy egész környezetére differenciálható függvénnyé; e kiterjesztésnek a m-szeres nullahelye lesz.

3. Mutassuk meg, hogy a $z \mapsto e^{1/z}$ függvénynek a 0-ban lényeges szingularitása van.

4. Adjuk meg a következő függvények Laurent-sorát a megjelölt izolált szingularitás körül:

(i) 0 körül:

$$z \mapsto \quad \frac{\operatorname{Cos} z^2}{z}, \quad \frac{\operatorname{Sin} z}{z^2}, \quad \frac{\operatorname{Cos} 2z}{\operatorname{Sin} z}, \quad \frac{1}{e^z - 1}, \quad \frac{z^3 + 3}{1 - \operatorname{Cos} z};$$

(ii) π körül:

$$z \mapsto \quad \frac{\operatorname{Cos} 2z}{\operatorname{Sin} z}, \quad \frac{\operatorname{Sin} z}{z - \pi};$$

(iii) 1 körül:

$$z \mapsto \quad \frac{e^z}{z^2 - 1}, \quad \frac{1}{e^{z-1} - 1}, \quad \frac{\operatorname{Sin} z - \operatorname{Sin} 1}{(z-1)^3}.$$

5. Legyen a a p polinom gyöke. A parciális törtekre bontás módszerével adjuk meg 1/p Laurent-sorát a körül.

6. Legyenek h és g $\mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ differenciálható függvények, és a-ban h-nak n-szeres nullahelye van (azaz $h^{(k)} = 0$, ha $k = 0, 1, .., n-1$, és $h^{(n)} \neq 0$), g-nek m-szeres nullahelye, $m \leq n$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

– h/g -nek megszüntethető szingularitása van a-ban, a megszüntetéssel kapott függvénynek $n - m$-szeres nullahelye van a-ban;

– g/h -nak $n - m$-edrendű pólusa van a-ban.

7. A reziduum-tétel

7.1. Definíció *Legyen a az $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ differenciálható függvény izolált szingularitása. Ekkor f-nek a-beli **reziduuma***

$$Res_a(f) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(a)} f,$$

ahol r olyan, hogy $\overline{K}_r(a) \setminus \{a\}$ benne van f értelmezési tartományában.

f a-beli reziduuma nem más, mint az f a körüli Laurent-sorának -1 indexű együtthatója.

Ha a-ban f-nek nulladrendű pólusa (megszüntethető szingularitása) van, akkor itt a reziduuma nulla.

A reziduum fogalma igen hasznosnak bizonyul sokféle alkalmazásban. Ahhoz, hogy jól tudjunk bánni vele, bevezetünk egy új függvénytípust.

7.2. Definíció *Az $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ differenciálható függvényt* ***meromorfnak*** *hívjuk, ha*

$$\mathrm{Dom} f = D \setminus P,$$

ahol
– *D nyílt halmaz,*
– *$P \subset D$,*
– *P-nek nincs torlódási pontja D-ben,*
– *P minden pontjában f-nek pólusa van.*

Minden $a \in P$ esetén f az a körül Laurent-sorba fejthető, és ezáltal f az a egy kipontozott környezetén $l_a + d_a$ alakba írható, ahol d_a az a-ban is értelmezett differenciálható függvény (($\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a$) nemnegatív kitevőjű hatványainak összege), l_a pedig, amelyet a függvény a-hoz tartozó **lényeges részének** nevezünk, ($\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a$) véges sok negatív hatványának az összege.

Vegyük észre, hogy – a véges összeg miatt – a függvénynek az a-hoz tartozó lényeges része természetszerűleg kiterjeszthető az egész $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ halmazra differenciálható függvénnyé; a továbbiakban mindig ezt a kiterjesztést nevezzük a függvény lényeges részének.

Tehát, ha a-ban m-edrendű pólus van, akkor

$$l_a = \sum_{n=1}^{m} \frac{c_n}{(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^n}.$$

Végül jegyezzük meg, hogy az $f - l_a$ függvénynek megszüntethető szingularitása van a-ban, azaz kiterjeszthető az a egy egész környezetére differenciálható függvénnyé: kiterjesztése éppen d_a lesz.

7.3. Állítás *(**Reziduum-tétel**) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ meromorf függvény, jelölje D és P azt, amit az előző pontban. Ha N korlátos, csillagszerű, nyílt halmaz D-ben, és G zárt görbe $N \cap \mathrm{Dom} f$-ben ($N \setminus P$ -ben), akkor*

$$\int_G f = 2\pi i \sum_{a \in P} Res_a(f)\, \mathrm{Ind}_G(a).$$

Bizonyítás Vegyük először is észre, hogy a fenti összeg, noha formailag végtelen tagú is lehet, valójában véges tagú. Valóban, $\mathrm{Ind}_G(z) = 0$, ha $z \notin N$, ezért csak a $P \cap N$ halmaz elemeire kell összegezni. Viszont e halmaznak nincs torlódási pontja (mert P-nek sincs), és korlátos (mert N korlátos), ezért csak véges sok eleme lehet (Bolzano–Weierstrass-tétel: korlátos végtelen halmaznak van torlódási pontja: Analízis III.A.3.9.2.).

Jelölje l_a az f-nek az a pólushoz tartozó lényeges részét. Ekkor az $f - \sum_{a \in P \cap N} l_a$ függvénynek $P \cap N$ pontjaiban megszüntethető szingularitásai vannak, tehát kiterjeszthető N-re differenciálható függvénnyé. Cauchy tétele szerint a kiterjesztett függvénynek a G-re vett integrálja nulla; a kiterjesztés azonban a G pontjaiban ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint az eredeti, tehát

$$\int_G \left(f - \sum_{a \in P \cap N} l_a \right) = 0.$$

Az l_a lényeges rész integráljában az összes tag nullát ad, kivéve a -1-edik hatványt (lásd 2.5.), amelynek együtthatója épp az f a-beli reziduuma; $\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a}$ integrálja viszont a G indexfüggvényének $2\pi i$-szeresét szolgáltatja:

$$\int_G l_a = 2\pi i \operatorname{Res}_a(f) \operatorname{Ind}_G(a).$$

A mondottakat összetéve megkapjuk a kívánt eredményt.

7.4. A reziduum-tétel alkalmazásához meg kell határoznunk függvények reziduumait. Most megismerkedünk néhány módszerrel, amelyek bizonyos esetekben könnyű és gyors számítást tesznek lehetővé.

(i) Ha f-nek a-ban elsőrendű pólusa van, van akkor a -1-nél kisebb indexű tagok nullák, ezért a függvényt $(z - a)$-val szorozva, és aztán z-vel a-hoz tartva épp megkapjuk a -1 indexű tag együtthatóját, vagyis a függvény reziduumát:

$$\operatorname{Res}_a(f) = \lim_{z \to a} (z - a) f(z).$$

Speciálisan, ha a függvény h/k alakú, ahol $h : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbf{V}$ és $k : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ differenciálhatók, $h(a) \neq 0$, $k(a) = 0$, $k'(a) \neq 0$, akkor

$$\operatorname{Res}_a \left(\frac{h}{k} \right) = \frac{h(a)}{k'(a)}.$$

(ii) Az előzőhöz hasonló okoskodással kapjuk, hogy ha f-nek a-ban m-edrendű pólusa van $(m > 0)$, akkor

$$\operatorname{Res}_a(f) = \lim_a \frac{1}{(m-1)!} \big((\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^m f \big)^{(m-1)}.$$

7.5. Feladatok

1. Keressük meg a következő függvények izolált szingularitásait, és számítsuk ki a megfelelő reziduumokat:

$$\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^2}, \quad \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^2 - 1}, \quad \frac{\mathrm{Sin}}{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}}, \quad \frac{1}{\mathrm{Exp} - 1}, \quad \frac{\mathrm{Cos}}{\mathrm{Sin}}, \quad \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^2 - 1}{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^2 + 1}, \quad \frac{1}{(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^2 + 1)^2}.$$

2. A reziduum-tétel alkalmazásával számoljuk ki az előző feladat függvényeinek integrálját

(i) a nulla középpontú, 1/3 és 3 sugarú körre;
(ii) az 1 középpontú, 1/3 és 3 sugarú körre;
(iii) az i középpontú, 1/3 és 3 sugarú körre.

3. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ meromorf függvény, jelentse D és P a 7.2. definícióban szereplő mennyiségeket, jelölje Z az f zérushelyeinek összességét, és tegyük fel, hogy Z-nek nincs torlódási pontja. Bizonyítsuk be, hogy ha N korlátos, csillagszerű, nyílt halmaz D-ben, G zárt görbe $(N \setminus (P \cup Z)$-ben, akkor bármely $h : D \to \mathbb{C}$ differenciálható függvényre

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_G h \frac{f}{f'} = \sum_{b \in Z} n_b h(b) \mathrm{Ind}_G(b) - \sum_{a \in P} m_a h(a) \mathrm{Ind}_G(a),$$

ahol n_b a b-beli zérushely rendje, m_a pedig az a-beli pólus rendje.

Alkalmazzuk eredményünket a $h = 1$ függvényre!

8. Valós integrálok kiszámítása a komplex függvénytan módszereivel

8.1. Bizonyos valós integrálok értékét a valós függvények integrálásainál megismert módszerekkel (parciális integrálás, parciális törtekre bontás, helyettesítéses integrálás) nem tudjuk kiszámítani. A komplex függvénytan segítségével azonban nagyon egyszerűvé válik egyes ilyen feladatok megoldása.

Legyen p és q valós polinom, amelyeket komplex polinomnak is tekintünk; tegyük fel, hogy q-nak nincs valós gyöke, és q foka legalább kettővel nagyobb p fokánál. Ekkor p/q folytonos függvény, amelyre a következő becslés érvényes: létezik $R_o > 0$ és $K > 0$ szám úgy, hogy

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \frac{K}{|z|^2}, \qquad \text{ha} \qquad |z| > R_o.$$

Ezért p/q integrálható a Lebesgue-mérték szerint az egész valós egyenesen. Integrálját a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{q} = 2\pi i \sum_{\substack{a : q(a) = 0 \\ \mathrm{Im}\, a > 0}} \mathrm{Res}_a \left(\frac{p}{q} \right).$$

Lássuk, hogyan kapjuk ezt az eredményt! p/q szingularitásai a q gyökeinél vannak, és a szingularitások pólusok. Minthogy q-nak csak véges sok gyöke van, p/q nyilván meromorf függvény. q gyökei az alsó és felső félsíkban szimmetrikusan helyezkednek el.

Legyen $R > 0$, és vezessük be a

$$\curvearrowleft_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \mathrm{Im} z > 0\}$$

jelölést. Ekkor $[-R, R] \cup \curvearrowleft_R$ a felső félsíkban levő félkörvonal. Tudjuk, hogy ennek indexfüggvénye 1 a görbén belül, 0 a görbén kívül.

Ha R elég nagy, akkor ezen a görbén kívül a felső félsíkban már nincs gyöke q-nak. A görbére – a szokásos irányítással – vett integrálás megegyezik a két görbeszakaszra vett integrálás összegével, tehát a reziduum-tétel szerint

$$\int_{-R}^{R} \frac{p}{q} + \int_{\curvearrowleft_R} \frac{p}{q} = 2\pi i \sum_{\substack{a: q(a)=0 \\ \mathrm{Im} a > 0}} \mathrm{Res}_a \left(\frac{p}{q}\right),$$

ahol, ne feledjük, R már akkora, hogy a szóban forgó görbén kívül a felső félsíkban már nincs gyöke q-nak.

A jobb oldal független R-től. A bal oldal első tagja az $R \to \infty$ határértékben megadja a keresett valós integrált. Azt kell csak tudnunk, mi a bal oldal második tagjának a határértéke, miközben R tart a végtelenhez. Az alábbi becslés alapján ez a határérték nulla:

$$\left| \int_{\curvearrowleft_R} \frac{p}{q} \right| \leq \frac{K}{R^2} R\pi,$$

ha R már az előzőekben megadott R_o-nál is nagyobb, vagyis ez az integrál nullához tart, miközben R tart a végtelenhez, és ezzel eljutottunk a kívánt végeredményhez.

Megemlítjük, hogy teljesen hasonlóan, a felső félsíkban levő pólusok helyett vehetjük az alsó félsíkban levőket is.

Mielőtt azonban konkrét esetekben az előbbi eredményt alkalmazni akarnánk, célszerű egy kicsit elgondolkodni. Ha ugyanis például p csupa páratlan hatványt tartalmaz, q pedig csupa párosat (vagy fordítva), akkor p/q páratlan függvény, amiből rögtön adódik, hogy az integrálja az egész valós egyenesre nulla.

8.2. Sokszor fordul elő, hogy nem az összes valós számra kell integrálnunk, hanem mondjuk csak a pozitívokra. Természetesen páros függvény esetén ez az integrál az egész számegyenesre vett integrálnak a fele. Nem páros függvényekre azonban új módszert kell találnunk.

A nullától végtelenig való integrálást egyszerű helyettesítéssel (az integrálási változó helyett véve annak negatívját) visszavezethetjük mínusz végtelentől nulláig való integrálásra. Most tehát ki akarjuk számítani $\int_{-\infty}^{0} p/q$ értékét, ahol p és

q polinom, q foka legalább kettővel nagyobb p fokánál, és q-nak nincs negatív és nulla gyöke. Azt állítjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{p}{q} = \sum_{\{a|q(a)=0\}} \mathrm{Res}_a \left(\frac{p}{q} \mathrm{Ln} \right).$$

Emlékeztetünk, hogy az Ln komplex logaritmusfüggvény az egész komplex számsíkon értelmezve van, kivéve a nullát, és $\mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\arg z$, ahol ln a természetes alapú valós logaritmusfüggvény, a komplex számok argumentuma (szöge) pedig a $]-\pi, \pi]$ intervallumba esik. Ezért igaz az

$$|\mathrm{Ln}z| \leq \ln|z| + \pi$$

egyenlőtlenség.

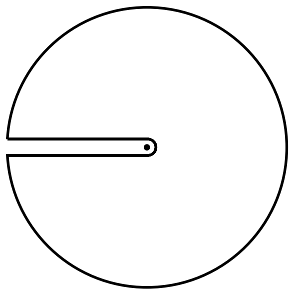
A negatív valós félegyenesen az Ln függvény nem folytonos, mindenhol máshol differenciálható is. Ha $x \in \mathbb{R}^-$, akkor

$$\mathrm{Ln}(x + i0) := \lim_{\substack{z \to x \\ \mathrm{Im}z > 0}} \mathrm{Ln}z = \mathrm{Ln}x = \ln|x| + \pi i,$$

$$\mathrm{Ln}(x - i0) := \lim_{\substack{z \to x \\ \mathrm{Im}z < 0}} \mathrm{Ln}z = \ln|x| - \pi i = \mathrm{Ln}x - 2\pi i.$$

A $\frac{p}{q}\mathrm{Ln}$ függvény leszűkítése a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ halmazra meromorf; szingularitásai a q gyökeiben vannak.

Vegyünk most egy olyan r és R sugarú kört, hogy az 5. ábrán látható zárt görbén belül van már a q polinom minden gyöke. Választhatjuk r-et olyan kicsinek, hogy a Laurent tételénél megismert módon ezt a zárt görbét összetehetjük négy olyan zárt görbéből, amelyek mindegyike benne van egy csillagszerű tartományban, és a négy görbére vett integrálás összege kiadja az eredeti görbére vett integrálást.



5. ábra

A reziduum-tétel szerint tehát az $F := \frac{p}{q}\mathrm{Ln}$ jelöléssel

$$\int\limits_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{0} F(x+ir)\,dx + \int\limits_{0}^{-\sqrt{R^2-r^2}} F(x-ir)\,dx+$$

$$\int\limits_{\pi/2}^{-\pi/2} F(re^{it})iRe^{it}\,dt + \int\limits_{-\pi/2+\arcsin(r/R)}^{\pi/2-\arcsin(r/R)} F(Re^{it})iRe^{it}\,dt =$$

$$= 2\pi i \sum_{\{a|q(a)=0\}} \mathrm{Res}_a\left(\frac{p}{q}\mathrm{Ln}\right).$$

A jobb oldal változatlan marad, miközben r tart a nullához, és R tart a végtelenhez. Megmutatjuk, hogy a bal oldal első két tagja együtt a kívánt integrál $2\pi i$-szeresét adja a szóban forgó határesetben, a másik két tag pedig nullát.

Valóban, a bal oldali első két tag együtt

$$\int\limits_{-R}^{0} \chi_{[-\sqrt{R^2-r^2},0]}(x)\big(F(x+ir)-F(x-ir)\big)\,dx,$$

amelynek limesze a Lebesgue-tétel alapján, miközben r tart a nullához,

$$\int\limits_{-R}^{0} 2\pi i\frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

és ebből a kívánt integrál $2\pi i$-szeresét kapjuk, ha R tart a végtelenhez.

Az r sugarú zárt körön belül $\frac{p}{q}$ folytonos, tehát korlátos függvény; L legyen egy korlátja. Ezzel

$$\left|\int\limits_{\pi/2}^{-\pi/2} F(re^{it})iRe^{it}\,dt\right| \le L\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\ln r+|t|)\,dt = \pi L(\ln r+\pi^2/4)r,$$

amiből megállapíthatjuk, hogy a szóban forgó integrál eltűnik, miközben r tart a nullához.

Az R sugarú körön, ha R elég nagy, a polinomok hányadosát $\frac{K}{R^2}$ majorálja, ahol K valamely pozitív szám. Ezért

$$\left|\int\limits_{-\pi/2+\arcsin(r/R)}^{\pi/2-\arcsin(r/R)} F(Re^{it})iRe^{it}\,dt\right| \le \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\ln R+|t|)R\frac{K}{R^2}\,dt = \pi\frac{K}{R}(\ln R+\pi^2/4),$$

tehát a kérdéses integrál eltűnik, miközben R tart a végtelenhez.

8.3. Nem integrálható, de impropriusan integrálható függvényre $\frac{\sin}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ az alap-példa (Analízis V.A.14.4.). Most ki is tudjuk számítani e függvénynek a pozitív számokra vett improrius integrálját.

A $z \mapsto \frac{e^{iz}-1}{iz}$ függvénynek a 0-ban megszüntethető szingularitása van; meg is szüntetjük úgy, hogy a függvény értékét a 0-ban 1-nek definiáljuk. Ezért ezt a függvényt a 8.1.-ben is szereplő $[-R, R] \cup \curvearrowleft_R$ görbére integrálva nullát kapunk. A félkörív szokásos paraméterezésével tehát

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos x - 1 + i \sin x}{ix} dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{iR(\cos t + i \sin t)} - 1}{iRe^{it}} iRe^{it} dt = 0.$$

Mivel $x \mapsto \frac{\cos x - 1}{x}$ páratlan függvény, az integrálja $-R$-től R-ig nulla, tehát az első integrálban csak a szinuszos tag marad meg.

$\sin t$ értéke 0 és 1 között változik, miközben t 0 és π között fut, ezért

$$|e^{iR\cos t - R\sin t}| = |e^{iR\cos t}\, e^{-R\sin t}| \le 1,$$

minden szóba jövő t-re, továbbá

$$\lim_{R\to\infty} e^{iR\cos t - R\sin t} = 0 \qquad (t \neq 0,\, t \neq \pi).$$

Ez azt jelenti, hogy a második integrandusnak van R-től független integrálható majoránsa, azaz alkalmazhatjuk Lebesgue tételét az integrálás és a határértékképzés felcserélésére a második integrálnál. Az integrandus határértéke -1, így végül arra jutunk, hogy

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x} dx - \pi = 0.$$

Páros függvényről lévén szó, 0-tól R-ig az integrál a $-R$-től R-ig vett integrál értékének a fele, tehát

$$\text{(improprius)} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

8.4. A fénytanban kerülnek elő a Fresnel-féle integrálok:

$$\text{(improprius)} \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \text{(improprius)} \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Most megmutatjuk ezeket az egyenlőségeket. Integráljuk a $\mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, z \mapsto e^{-z^2}$ függvényt egy olyan R sugarú körcikkvonalra, amelynek középpontja a 0, egyik sugara a pozitív valós tengelyen van, a másik sugara a felső félsíkban van, és a két sugár $\pi/4$ szöget zár be egymással. A függvény mindenütt értelmezett és differenciálható, ezért az integrálja nulla. A valós tengelyre eső sugár paraméterezése valamint a körív paraméterezése legyen a szokásos. A másik sugár paraméterezése legyen $t \mapsto \frac{1+i}{\sqrt{2}}(R-t)$, miközben t a 0 és az R között fut; ne feledjük, hogy $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$. Tehát

$$\int_0^R e^{-x^2}dx + \int_0^{\pi/4} e^{-R^2e^{2it}} iRe^{it}dt + \int_0^R e^{-i(R-t)^2}\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)dt = 0.$$

Most is vesszük az $R \to \infty$ határértéket. Az első integrál értékét ismerjük: $\sqrt{\pi}/2$.

$e^{2it} = \cos 2t + i\sin 2t$, így a második integrandus abszolút értéke $e^{-R^2\cos 2t}R \leq 1$, és a határértéke 0 miközben R tart a végtelenhez, minden szóba jövő t-re. Lebesgue tételének alkalmazásával tehát ez az integrál nullához tart $R \to \infty$ esetén.

A harmadik integrálban hajtsuk végre az $x := R - t$ helyettesítést. Ezzel ezt kapjuk:

$$-\int_0^R (\cos x^2 - i\sin x^2)\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)dx.$$

Bontsuk szét az integrált valós és képzetes részre, és vegyük az $R \to \infty$ határesetet. Az első integrál valós értékű, ezért a valós részből

$$\int_0^\infty (\cos x^2 + \sin x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}},$$

a képzetes részből

$$\int_0^\infty (\cos x^2 - \sin x^2)dx = 0$$

adódik. E másodikból látjuk, hogy a két szóban forgó függvény integrálja megegyezik, az elsőből pedig megkapjuk az integrálok érékét.

8.5. Feladatok

1. Számítsuk ki a következő integrálokat:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+2x^2+1}dx, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^4-+x^2+1}dx, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{2x^3+x^2+1}dx.$$

2. Számítsuk ki az

$$\text{(improprius)} \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}dx$$

integrált.